

Геометризация мультифизических расчётов на основе тензорного анализа сетей

Ю.Н. Сохор,
к.т.н., доц., diel2004@list.ru,
РЦИ, г. Москва

Приводятся примеры геометрических построений для линейных цепей. Рассмотрены базовые понятия дифференциальной геометрии для многомерных пространств нелинейных цепей, ковариантная форма уравнений обобщенного электромеханического преобразователя энергии

Examples of geometrical constructions for linear circuits are presented. Base concepts of differential geometry for multi-dimensional spaces of nonlinear circuits, the covariant form of the equations of the generalised electromechanical converter of energy are considered

Введение

Метод электроаналогий позволяет формулировать и решать мультифизические задачи в терминах электрических цепей [1]. Дальнейшее развитие метода связывается с геометрическими интерпретациями уравнений электрических и неэлектрических схем на основе тензорного анализа сетей [2]. Цель статьи – сформулировать расчетные уравнения в базовых геометрических терминах с применением тензорных обозначений. Рассматриваются основные геометрические объекты – системы координат и метрические тензоры. Выражение метрики геометрических пространств через параметры физического процесса, движение вдоль геодезической, изучение кривизны пространств позволяют выполнить оценку устойчивости процессов, выбрать их оптимальные траектории.

1. Геометрические объекты для исследований линейных схем

1.1. Соглашения об обозначениях

Расчётные уравнения электрической схемы связывают контурные токи i^m и э.д.с. e_m : $e_m = z_{mn}i^n$, где z_{mn} - матрица контурных сопротивлений или связывают узловые напряжения E_m и токи I^m : $I^m = y^{nm}E_n$, где y^{nm} - матрица узловых проводимостей. Математически оба уравнения симметричны, поэтому далее будем рассматривать только контурные уравнения.

Вводится система основных координат Oi^m для контурных токов и взаимных координат для контурных э.д.с. Oe_m . Режим работы схемы отображается точкой X или схемным вектором \vec{X} . Составляющие I^m вектора \vec{X} в основной системе координат измеряются в масштабах длин базисных векторов \vec{a}_m . Составляющие E_m вектора \vec{X} во взаимной системе координат измеряются в масштабах длин базисных векторов \vec{a}^m . В векторной форме записи и соответственно в компонентной форме записи будем иметь:

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \vec{a}_m i^m, & I^n &= a_m^n i^m \\ \vec{X} &= \vec{a}^m e_m, & E_n &= a_n^m e_m \end{aligned} \quad (1)$$

где i^m - координаты вектора \vec{X} в основной системе, e_m - координаты вектора \vec{X} во взаимной системе.

Матрицы контурных сопротивлений z_{mn} и контурных проводимостей y^{mn} соответствуют метрическим тензорам основной и взаимной систем координат. Будем считать их заданными: $z_{mn} = z_{nm}$; $y^{mn} = (z_{mn})^{-1}$.

1.2. Основная система координат

Приведем соотношения, которые позволяют определить основную систему координат по известным значениям метрических коэффициентов z_{mn} и значениям координат i^m вектора \vec{X} . Квадрат длины вектора:

$$|\vec{X}|^2 = (\vec{a}_m i^m) \cdot (\vec{a}_n i^n) = (\vec{a}_m \cdot \vec{a}_n) i^m i^n.$$

Так как метрический тензор выражается через базисные векторы [3]:

$$z_{mn} = (\vec{a}_m \cdot \vec{a}_n), \quad (2)$$

то квадрат длины вектора \vec{X} : $|\vec{X}|^2 = z_{mn} i^m i^n$.

Из уравнений (2) можно получить длины базисных векторов. Так как диагональные элементы: $z_{mm} = (\vec{a}_m \cdot \vec{a}_m) = (a_m)^2$, то длины базисных векторов находятся по формуле:

$$a_m = \sqrt{z_{mm}} \cdot \quad (3)$$

Недиагональные элементы метрического тензора получаются из скалярного произведения:

$$z_{mn} = (\vec{a}_m \cdot \vec{a}_n) = a_m a_n \cos(\theta_{mn}) = \sqrt{z_{mm}} \cdot \sqrt{z_{nn}} \cos(\theta_{mn}), \quad (4)$$

где θ_{mn} - угол между осями i^m и i^n основной системы координат.

Из (4) следует, что по метрическим коэффициентам можно вычислить углы между осями:

$$\theta_{mn} = \arccos\left(\frac{z_{mn}}{\sqrt{z_{mm}} \cdot \sqrt{z_{nn}}}\right).$$

Для расчёта длин проекций вектора в косоугольных координатах вместо (1) можно использовать соотношение:

$$l^m = \sqrt{z_{mm}} \cdot i^m.$$

1.3. Взаимная система координат

Отметим, что взаимной системе координат соответствует система координат контурных э.д.с. \mathbf{Oe}_m , длинам проекций вектора \vec{X} на взаимные координаты \mathbf{Oe}_m соответствуют длины E_m , координатам вектора \vec{X} соответствуют контурные э.д.с. e_m , метрическому тензору соответствуют контурные проводимости y^{mn} .

Базисные векторы взаимной системы координат располагаются таким образом, чтобы выполнялось условие ортогональности взаимной системы координат к основной системе координат $\vec{a}_m \cdot \vec{a}^n = \delta_m^n$, то есть базисные векторы с разными индексами должны быть перпендикулярны. Длины базисных векторов взаимной системы вычисляются аналогично (3): $a^m = \sqrt{y^{mm}}$. Длины E_m проекций вектора \vec{X} на оси координат взаимной системы: $E_m = a^m e_m$.

$$\text{Угол между осями взаимной системы: } \theta^{mn} = \arccos\left(\frac{y^{mn}}{\sqrt{y^{mm}} \cdot \sqrt{y^{nn}}}\right)$$

Таким образом, один и тот же вектор \vec{X} может быть представлен в двух системах косоугольных координат, основной $\mathbf{O}i^m$ и взаимной $\mathbf{O}e_m$. Проекциям схемного вектора на основные и взаимные координаты соответствуют контурные токи и контурные э.д.с.: $\vec{X} = \vec{a}_m i^m = \vec{a}^m e_m$. Длина схемного вектора соответствует мощности схемы: $|\vec{X}|^2 = z_{mn} i^m i^n = y^{mn} e_m e_n$.

В качестве иллюстрации, на рис.1 изображен схемный вектор и система координат для двухконтурной схемы.

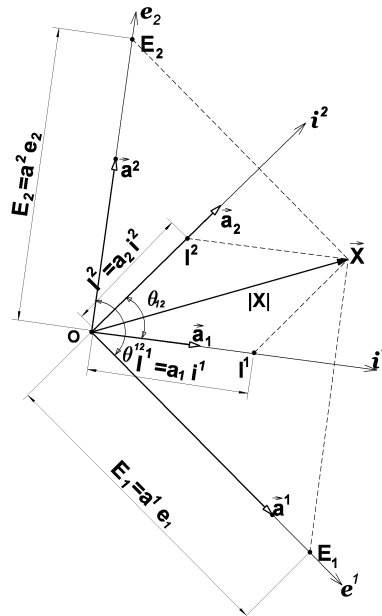


рис.1 Компоненты схемного вектора \vec{X} в основной $\mathbf{O}i^m$ и взаимной $\mathbf{O}e_m$ системах координат

2. Геометрические объекты для нелинейных схем

2.1. Криволинейная система координат

2.1.1. Исходные уравнения. В общем случае для нелинейной схемы связь контурных э.д.с. и контурных токов выражается набором функций:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= f^1(i^1, i^2, \dots, i^m) \\
\mathbf{e}_2 &= f^2(i^1, i^2, \dots, i^m) \\
&\dots \\
\mathbf{e}_m &= f^m(i^1, i^2, \dots, i^m)
\end{aligned} \tag{5}$$

Далее будем рассматривать только правую часть (5) считая, что заданы m -мерные декартовы координаты f^m и эти координаты выражены в функциях от параметров (контурных токов) i^m , то есть задана параметризованная вектор-функция в декартовой системе координат:

$$\mathbf{f}^m = \begin{pmatrix} f^1(i^1, i^2, \dots, i^m) \\ f^2(i^1, i^2, \dots, i^m) \\ \dots \\ f^m(i^1, i^2, \dots, i^m) \end{pmatrix} \tag{6}$$

2.1.2. Координатные оси. Если в уравнениях (5) зафиксировать $m-1$ параметр, то координаты f^m станут функциями только одного параметра, поэтому уравнения (5) будут определять параметрическую кривую в этих координатах. В общем случае будем иметь m кривых, которые будут определять криволинейную систему координат, проходящую через точку O_s с фиксированными координатами, которые обозначим $(F_{(s)}^1, F_{(s)}^2, \dots, F_{(s)}^m)$. Эти координаты в свою очередь могут быть найдены из $F^m = f^m(i^1, i^2, \dots, i^m)$. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
f^{m1} &= f^m(i^1, l_{(s)}^2, \dots, l_{(s)}^m) - \text{кривая } i^1 \\
f^{m2} &= f^m(l_{(s)}^1, i^2, \dots, l_{(s)}^m) - \text{кривая } i^2 \\
&\dots \\
f^{mm} &= f^m(l_{(s)}^1, l_{(s)}^2, \dots, i^m) - \text{кривая } i^m
\end{aligned}$$

Следует заметить, что при изменении координат f^m изменяются координаты центра O_s , при этом координатные оси $O_s i^m_{(s)}$ деформируются.

2.1.3. Метрический тензор криволинейной системы координат. Для определения метрического тензора проводят касательные к координатным кривым в точке O_s . В результате получается косоугольная система координат. Каждая точка будет иметь свою локальную систему координат, которая будет отличаться от систем координат в других точках.

Рассмотрим точку F , расположенную на бесконечно близком расстоянии $d\mathbf{r}$ от O_s . Соединив O_s и F , получим вектор $d\vec{F}$. Приращения по осям декартовых координат df^m при перемещении из O_s в F получим дифференцированием (6):

$$d\mathbf{f}^m = \left(\frac{\partial f^m}{\partial i^n} \right)_{O_s} di^n = \alpha_n^m di^n,$$

где введены обозначения для компонент базисных векторов:

$$\left(\frac{\partial f^m}{\partial i^n} \right)_{O_s} = \alpha_n^m \tag{7}$$

Теперь найдём квадрат расстояния $(d\mathbf{r})^2$

$$(d\mathbf{r})^2 = (d\mathbf{f}^m)^2 = \alpha_n^m \alpha_p^m di^n di^p = g_{np} di^n di^p,$$

где g_{np} - метрика системы криволинейных координат, вычисляется по формуле:

$$g_{np} = \alpha_n^m \alpha_p^m \tag{8}$$

Длины базисных векторов вдоль локальных осей вычисляются аналогично (3): $\mathbf{a}_{(m)} = \sqrt{g_{mm}} = \sqrt{\alpha_m^n \alpha_m^n}$. Направляющие косинусы косоугольных осей относительно декартовых осей: $\beta_n^m = \frac{\alpha_n^m}{\sqrt{g_{nn}}}$, где m - индекс декартовой оси, n

- индекс косоугольной оси. Угол между косоугольными осями p и n : $\theta_{pn} = \arccos \left(\frac{g_{pn}}{\sqrt{g_{pp}} \cdot \sqrt{g_{nn}}} \right)$.

2.2. Система координат на поверхности

2.2.1. Координатные оси. Принципы построения системы координат и расчет метрических коэффициентов на поверхности остается таким же, как и для криволинейной системы координат. В общем случае, m -мерная гиперповерхность может быть построена в $m+1$ - мерном пространстве:

$$f^{m+1} = f^{m+1}(i^1, i^2, \dots, i^m), \quad (9)$$

где параметры i^m - криволинейные координаты на m -мерной гиперповерхности.

Координаты центра пересечения осей обозначим (i^1, i^2, \dots, i^m) . Если зафиксировать один из параметров $i^k = i^k = \text{const}$ то получим параметрическое уравнение гиперкривой, лежащей на гиперповерхности $f^{m+1} = f^{m+1}(i^1, i^2, \dots, i^k, \dots, i^m)$.

2.2.2. Метрика на поверхности. Метрика на поверхности строится аналогично метрике криволинейных координат. Для нелинейных уравнений (9), аналогично уравнениям (7) и (8) в точке поверхности O_s рассчитываются сначала

компоненты базисных векторов α_n^k , затем метрических коэффициентов $g_{np} = \alpha_n^k = \left(\frac{\partial f^k}{\partial i^m} \right)_{O_s}$, $g_{np} = \alpha_n^k \alpha_p^k$. Или в

матричной форме:

$$\alpha_m^k = \left(\frac{\partial f^k}{\partial i^m} \right) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{m+1} \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m^1 & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^{m+1} \end{pmatrix}$$

Если коэффициенты α_n^k ввести в форме базисных векторов:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= (\alpha_1^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_1^{m+1}) \\ \bar{\alpha}_2 &= (\alpha_2^1, \alpha_2^2, \dots, \alpha_2^{m+1}) \\ &\dots \\ \bar{\alpha}_m &= (\alpha_m^1, \alpha_m^2, \dots, \alpha_m^{m+1}) \end{aligned}$$

то метрические коэффициенты можно вычислить через скалярные произведения, аналогично тому, как это делалось для косоугольных координат (2): $g_{kn} = (\bar{\alpha}_k \cdot \bar{\alpha}_n)$. Матрица $(\bar{\alpha}_k \cdot \bar{\alpha}_n)$ известна в дифференциальной геометрии как матрица Грама. Коэффициенты k и n меняются от 1 до m (по числу координат на поверхности):

$$g_{kn} = (\bar{\alpha}_k \cdot \bar{\alpha}_n) = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_1 & \dots & \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{\alpha}_m \cdot \bar{\alpha}_1 & \dots & \bar{\alpha}_m \cdot \bar{\alpha}_m \end{bmatrix}$$

3. Уравнения обобщённого электромеханического преобразователя энергии

Уравнения, связывающие ковариантные и контравариантные переменные, могут быть получены из уравнений Эйлера-Лагранжа. Рассмотрим пример вывода уравнений для обобщенного электромеханического преобразователя энергии.

Кинетическая энергия преобразователя:

$$T = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} i^\alpha i^\beta, \quad (10)$$

где $g_{\alpha\beta}$ - метрический тензор, в состав которого входят индуктивности обмоток, механические массы и моменты инерции, i^α - вектор токов в обмотках, угловые и линейные скорости механической части.

Потенциальная энергия: $P=0$.

Рассеяние энергии:

$$D = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} i^\alpha i^\beta, \quad (11)$$

где в состав $R_{\alpha\beta}$ входят сопротивления обмоток, коэффициенты трения в механической части.

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\gamma} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}^\gamma} = Q_\gamma,$$

где $L = T - P$, x^α - вектор электрических зарядов, угловых и линейных перемещений механической части.

Подставляя L , найдем: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\gamma} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}^\gamma} = e_\gamma,$

где \mathbf{e}_γ - вектор внешних воздействий: источников напряжений в обмотках, внешних источников механических сил и вращающих моментов.

Раскрывая \mathbf{T} и \mathbf{D} из (10) и (11), получим уравнение обобщенного электромеханического преобразователя в тензорной форме:

$$\mathbf{g}_{\gamma\beta} \frac{d\mathbf{i}^\beta}{dt} + \mathbf{R}_{\gamma\beta} \mathbf{i}^\beta + \Gamma_{\alpha\beta,\gamma} \mathbf{i}^\alpha \mathbf{i}^\beta = \mathbf{e}_\gamma, \quad (12)$$

где $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$ – коэффициенты Кристоффеля 1-го рода:

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathbf{g}_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \mathbf{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \right).$$

Уравнение (12) можно записать в более компактной форме [4]:

$$\mathbf{g}_{\gamma\beta} \frac{\delta \mathbf{i}^\beta}{\delta t} + \mathbf{R}_{\gamma\beta} \mathbf{i}^\beta = \mathbf{e}_\gamma$$

где $\frac{\delta \mathbf{i}^\beta}{\delta t} = \frac{d\mathbf{i}^\beta}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{i}^\alpha \mathbf{i}^\beta$ - ковариантная производная.

Символы Кристоффеля 2-го рода $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ вычисляются с использованием метрического тензора: $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \mathbf{g}^{\gamma\mu} \Gamma_{\alpha\beta,\mu}$,
 $\mathbf{g}^{\gamma\mu} = (\mathbf{g}_{\gamma\mu})^{-1}$

Литература

1. Ю.Н. Сохор. Декомпозиционные расчёты технических систем на основе методов диакоптики. – Труды 16-й международной конференции «Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM-2016)». – Под. ред. А.В.Толока. М.: ООО «Аналитик». -2016. С.426-430.
2. Г. Крон. Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. Радио, 1978. – 720 с.
3. Г.В. Корнев. Тензорное исчисление. - М.: Изд-во МФТИ, 1995. -240 с.
4. G. Kron. Non-Riemannian Dynamics of Rotating Electrical Machinery. Journ. Math. Phys. v.13, 103, 1934