Об одной задаче оптимальной стабилизации одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений

В.Р. Барсегян,
вед. н. с., проф. каф. механ. ЕГУ, д.ф.-м.н., проф., barsehyan@sci.am
Институт механики НАН Армении, ЕГУ, г. Ереван, АРМЕНИЯ
Т.А. Симонян,
доц. каф. механ. ЕГУ, к.ф.-м.н., simtom09@gmail.com,
ЕГУ, г. Ереван, АРМЕНИЯ

Исследуется задача оптимальной стабилизации систем линейных нагруженных дифференциальных уравнений. Учитывая характер влияния нагруженных слагаемых на динамику процесса система нагруженных дифференциальных уравнений представляется в виде поэтапно меняющихся дифференциальных уравнений. На основе метода функции Ляпунова предложен способ построения оптимального стабилизирующего управления.

The problem of optimal stabilization of systems of linear loaded differential equations is studied. Taking into account the nature of the influence of the loaded summands on the dynamics of the process, the system of loaded differential equations is represented in the form of step-by-step changing differential equations. Based on the Lyapunov function method, a way for constructing optimal stabilizing control is proposed.

Введение

Математическое описание динамических процессов управления, зависящих не только от настоящего, но и предыстории процесса, осуществляется при помощи дифференциальных уравнений с памятью различных видов, называемых также нагруженными дифференциальными уравнениями. Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе [1-6] принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы (функции) от решения, в частности, значения решения, в которых фазовое состояние процесса в какой-либо точке и в какой-либо момент может оказывать влияние на динамику процесса в целом. На практике такого рода задачи возникают, например, когда при необходимости вести наблюдение динамического процесса, измеряются фазовые состояния в какие-либо моменты времени и непрерывно передаются информации с помощью обратной связи.

Наличие в динамике системы нагруженного слагаемого не всегда позволяет непосредственно применять известные методы исследований, развитые при исследованиях обычных (не нагруженных) динамических систем. В зависимости от характера влияния нагруженных слагаемых на динамику процесса, некоторые системы нагруженных дифференциальных уравнений представляются в виде поэтапно меняющихся дифференциальных уравнений [6-9]. В работе [10] рассмотрен задача стабилизации движения нестационарной управляемой системы и синтезированы стабилизирующие оптимальные управления многосвязанных систем.

В данной работе на основе метода функции Ляпунова [11-12] построена оптимальное стабилизирующее управление конкретной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемый процесс, динамика которого описывается следующими нагруженными линейными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = A_0 x + A_1 x(t_1) + A_2 x(t_2) + bu \tag{1.1}$$

где $x(t) \in R^2$ фазовый вектор системы, A_k $(k = 0,1,2)$ матрицы и b вектор постоянных параметров системы

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где a_1, a_2 значения отличных от нуля констант, u - управляющее воздействие.

Предполагается, что заданы моменты времени t_k, $k = 0,1,2$ такие, что $0 \le t_0 < t_1 < t_2 < \infty$. Функция $x(t)$ непрерывна на интервалах $[t_{k-1}, t_k)$ и в точках нагружения t_k имеет конечные левосторонние пределы $\lim\limits_{t \to t_k - 0} x(t) = x(t_k)$.

В формуле (1.1) слагаемые $A_k x(t_k)$, $k = 1,2$, как функции влияют на систему, начиная с момента времени $t \ge t_k$. Так как значение фазового состояния $x(t_k)$, как результат измерения, определяется в момент времени $t = t_k$ и с этого момента (при $t \ge t_k$) непрерывно влияет на систему в виде слагаемого $A_k x(t_k)$. Моменты времени t_k, $k = 1,2$ являются точками нагружения.

Пусть для оценки движения управляемой нагруженной системы (1.1) имеем следующий функционал:

$$J[\cdot]=J_1[\cdot]+J_2[\cdot]+J_3[\cdot]=\int_{t_0}^{t_1}\omega_1 dt+\int_{t_1}^{t_2}\omega_2 dt+\int_{t_2}^{\infty}\omega_3 dt \tag{1.2}$$

где

$$\omega_1=\alpha_{11}^{(1)}(x_1(t))^2+2\alpha_{12}^{(1)}x_1(t)x_2(t)+\alpha_{22}^{(1)}(x_2(t))^2+\beta_1 u^2,$$
$$\omega_2=\alpha_{11}^{(2)}(x_1(t))^2+2\alpha_{12}^{(2)}x_1(t)x_2(t)+\alpha_{22}^{(2)}(x_2(t))^2+\beta_2 u^2,$$
$$\omega_3=\alpha_{11}^{(3)}(x_1(t))^2+2\alpha_{12}^{(3)}x_1(t)x_2(t)+\alpha_{22}^{(3)}(x_2(t))^2+\beta_3 u^2.$$

Сформулируем задачу оптимальной стабилизации движения управляемой нагруженной системы (1.1) с функционалом (1.2) следующим образом.

Задача. Требуется найти оптимальное управляющее воздействие u^0, которое для произвольных начальных условий обеспечивает асимптотическую устойчивость решения системы (1.1) и минимизирует функционал (1.2).

Наличие в динамике системы (1.1) нагруженного слагаемого $A_k x(t_k)$ не всегда позволяет непосредственно применять известные методы исследования, которые развиты для обычных (не нагруженных) динамических систем.

2. Об основных результатах

Для построения решения задачи интервал $[t_0,\infty)$ разбиваем на части точками нагружения: $[t_0,\infty)=[t_0,t_1)\cup[t_1,t_2)\cup[t_2,\infty)$. Учитывая последовательность точек нагружения и характер соответствующих слагаемых $A_k x(t_k)$ $(k=1,2)$ уравнение (1.1) запишем по отдельности на интервалах разбиения в виде поэтапно меняющихся дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=\begin{cases}A_0x+bu & при \quad t\in[t_0,t_1)\\ A_0x+A_1x(t_1)+bu & при \quad t\in[t_1,t_2)\\ A_0x+A_1x(t_1)+A_2x(t_2)+bu & при \quad t\in[t_2,\infty)\end{cases}. \tag{2.1}$$

Поэтапно меняющаяся система (2.1) состоит из трех систем линейных дифференциальных уравнений, из которых первые две подсистемы определены на конечном интервале времени $[t_0,t_2)$, а последняя подсистема определена на интервале $[t_2,\infty)$. Поэтому, следуя [8, 12] на конечном интервале времени $[t_0,t_2)$ должны найти оптимальное управляющее воздействие, которое для произвольного начального условия обеспечивало устойчивое движение для первых двух подсистем и минимальное значение функционала (1.2) (соответствующей части) на интервале времени $[t_0,t_2)$. Следовательно, для решения поставленной задачи оптимальной стабилизации движения управляемой нагруженной системы (1.1) целесообразно разделить эту задачу на две части, каждая из которых сформулируется следующим образом.

Задача 1. Требуется найти оптимальное управляющее воздействие u^0, которое при движениях системы

$$\dot{x}=\begin{cases}A_0x+bu & при \quad t\in[t_0,t_1)\\ A_0x+A_1x(t_1)+bu & при \quad t\in[t_1,t_2)\end{cases}. \tag{2.2}$$

с произвольными начальными условиями обеспечивает минимальное значение функционалу

$$J[\cdot]=J_1[\cdot]+J_2[\cdot]=\int_{t_0}^{t_1}\omega_1 dt+\int_{t_1}^{t_2}\omega_2 dt. \tag{2.3}$$

Задача 2. Требуется найти оптимальное управляющее воздействие u^0, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость решения системы

$$\dot{x}=A_0x+A_1x(t_1)+A_2x(t_2)+bu \quad при \quad t\in[t_2,\infty) \tag{2.4}$$

и минимизирует функционал

$$J_3[\cdot]=\int_{t_2}^{\infty}\omega_3 dt. \tag{2.5}$$

Для решения поставленных задач предположим, что существуют определенно-положительные функции Ляпунова

$$\overline{V}=V_1(x,t)+V_2(x,t),\ V_k(x,t)\quad t\in[t_{k-1},t_k)\ (k=1,2) \text{ и } V(x,t)\quad t\in[t_2,\infty), \tag{2.6}$$

где $V_k(x,t)$ $(k=1,2)$ и $V(x,t)$ - определенно-положительные функции Ляпунова для подсистем (2.2) и (2.4), допускающих бесконечно малый высший предел, полные производные по времени которых вдоль решений соответствующих подсистем являются определенно-отрицательными функциями. При данных предположениях построение функции оптимальной стабилизации, применительное к системе (1.1) (или (2.1)), осуществляется на основе подхода, разработанного в работах [11, 12].

Для решения задачи 1 и задачи 2 на основе метода функции Ляпунова (с учетом (2.6)), составим следующие выражения (функции Беллмана):

$$B_1[\cdot]=\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{\partial V_1}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\dot{x}_2+\omega_1,\qquad B_2[\cdot]=\frac{\partial V_2}{\partial t}+\frac{\partial V_2}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial V_2}{\partial x_2}\dot{x}_2+\omega_2, \tag{2.7}$$

$$B[\cdot]=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2+\omega_3. \tag{2.8}$$

Так как при оптимальном управлении $u=u^0$ выражения для $B_k[\cdot]$ $(k=1,2)$ и $B[\cdot]$ должны принимать минимальные значения, следовательно, будут иметь место условия [11, 12]

$$\left.\frac{\partial B_k[\cdot]}{\partial u}\right|_{u^0}=0,\ \ t\in[t_{k-1},t_k),\ \ k=1,2, \tag{2.9}$$

$$\left.\frac{\partial B[\cdot]}{\partial u}\right|_{u^0}=0,\ \ t\in[t_2,\infty). \tag{2.10}$$

Подставляя выражения $B_1[\cdot]$, $B_2[\cdot]$ в (2.9), а $B[\cdot]$ в (2.10) соответственно, и вычисляя производные, получим

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_2}+2\beta_1 u^0=0,\qquad \frac{\partial V_2}{\partial x_2}+2\beta_2 u^0=0,\qquad \frac{\partial V}{\partial x_2}+2\beta_3 u^0=0,$$

из которых получим оптимальные управляющие функции в виде

$$u^0=-\frac{1}{2\beta_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_2}\quad \text{при}\quad t\in[t_{k-1},t_k),\ \ k=1,2, \tag{2.11}$$

$$u^0=-\frac{1}{2\beta_3}\frac{\partial V}{\partial x_2}\quad \text{при}\quad t\in[t_2,\infty). \tag{2.12}$$

Таким образом, оптимальные управляющие воздействия u^0, решающие задачу 1 и задачу 2, получены в виде (2.11) и (2.12), соответственно. Подставляя эти выражения в (2.7) и (2.8) и требуя, чтобы выполнялись условия $B_k[\cdot]=0$, $(k=1,2)$ и $B[\cdot]=0$, будем иметь дифференциальные уравнения с частными производными относительно функций Ляпунова $V_k(x,t)$, $t\in[t_{k-1},t_k)$ $(k=1,2)$ и $V(x,t)$, $t\in[t_2,\infty)$:

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{\partial V_1}{\partial x_1}x_2-\frac{1}{4\beta_1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)^2+\alpha_{11}^{(1)}x_1^2+2\alpha_{12}^{(1)}x_1x_2+\alpha_{22}^{(1)}x_2^2=0 \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t}+\frac{\partial V_2}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial V_2}{\partial x_2}\left(a_1x_1(t_1)-\frac{1}{2\beta_2}\frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right)+\alpha_{11}^{(2)}x_1^2+2\alpha_{12}^{(2)}x_1x_2+\alpha_{22}^{(2)}x_2^2+\frac{1}{4\beta_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right)^2=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial V}{\partial x_2}\left(a_1x_1(t_1)+a_2x_2(t_2)-\frac{1}{2\beta_3}\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)+\alpha_{11}^{(3)}x_1^2+2\alpha_{12}^{(3)}x_1x_2+\alpha_{22}^{(3)}x_2^2+\frac{1}{4\beta_3}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2=0 \tag{2.14}$$

Будем искать функции Ляпунова $V_k(x,t)$, $(k=1,2)$ и $V(x,t)$ в следующем виде:

$$V_1=C_{11}^{(1)}(x_1(t))^2+2C_{12}^{(1)}x_1(t)x_2(t)+C_{22}^{(1)}(x_2(t))^2,$$

$$V_2=C_{11}^{(2)}(x_1(t))^2+2C_{12}^{(2)}x_1(t)x_2(t)+C_{22}^{(2)}(x_2(t))^2, \tag{2.15}$$

$$V=C_{11}^{(3)}(x_1(t))^2+2C_{12}^{(3)}x_1(t)x_2(t)+C_{22}^{(3)}(x_2(t))^2. \tag{2.16}$$

Подставляя (2.15) и (2.16), соответственно, в (2.13) и (2.14) и проведя группировку по по независимым переменным получим системы алгебраических уравнений относительно неизвестных величин $C_{11}^{(1)}$, $C_{12}^{(1)}$, $C_{22}^{(1)}$, $C_{11}^{(2)}$, $C_{12}^{(2)}$, $C_{22}^{(2)}$ и $C_{11}^{(3)}$, $C_{12}^{(3)}$, $C_{22}^{(3)}$.

Предпологая, что параметры систем (1.1) и коэффициенты в функционале (1.2) принимают следующие числовые значения:

$$a_1=-2,\ a_2=3,\quad \beta_k=1,\quad (k=1,2,3),\ \ \alpha_{ij}^{(1)}=1,\ \alpha_{ij}^{(2)}=2,\ \alpha_{ij}^{(3)}=3\ (i,j=1,2)$$

и выбирая только те решения системы алгебраических уравнений, которые обеспечивают функциям Ляпунова положительно-определенность, будем иметь:

$$C_{11}^{(1)} = \sqrt{3} - 1 \approx 0{,}73, \quad C_{12}^{(1)} = 1, \quad C_{22}^{(1)} = \sqrt{3} \approx 1{,}73, \quad C_{11}^{(2)} \approx 1{,}08, \quad C_{12}^{(2)} \approx 1{,}4, \quad C_{22}^{(2)} \approx 2{,}2, \tag{2.17}$$

$$C_{11}^{(3)} \approx 1{,}25, \quad C_{12}^{(3)} \approx 1{,}7, \quad C_{22}^{(3)} \approx 2{,}5. \tag{2.18}$$

Отметим, что полученные значения для $C_{11}^{(1)}$, $C_{12}^{(1)}$, $C_{22}^{(1)}$, $C_{11}^{(2)}$, $C_{12}^{(2)}$, $C_{22}^{(2)}$ и $C_{11}^{(3)}$, $C_{12}^{(3)}$, $C_{22}^{(3)}$ удовлетворяют условиям Сильвестра,

Подставляя (2.17) и (2.18) в выражения для функций Ляпунова (2.15) и (2.16), получим

$$\begin{aligned} V_1 &= 0{,}73(x_1(t))^2 + 2x_1(t)x_2(t) + 1{,}73(x_2(t))^2 \\ V_2 &= 1{,}08(x_1(t))^2 + 2{,}8x_1(t)x_2(t) + 2{,}2(x_2(t))^2 \\ V &= 1{,}25(x_1(t))^2 + 3{,}4x_1(t)x_2(t) + 2{,}5(x_2(t))^2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Следовательно, согласно формулам (2.11) и (2.12), получим оптимальные управляющие воздействия в явном виде:

$$\begin{aligned} u^0 &= -x_1(t) - 1{,}73x_2(t) \quad \text{при} \quad t \in [t_0, t_1), \\ u^0 &= -1{,}4x_1(t) - 2{,}2x_2(t) \quad \text{при} \quad t \in [t_1, t_2), \\ u^0 &= -1{,}7x_1(t) - 2{,}5x_2(t) \quad \text{при} \quad t \in [t_2, \infty). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Предполагая, что $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, а движение системы (1.1) начинается из начального состояния с координатами $x_1(t_0) = 1$, $x_2(t_0) = 1$, с учетом выражения оптимальных управлений (2.20), получим оптимальные движения системы на интервалах времени $[t_0, t_1)$, $[t_1, t_2)$, $[t_2, \infty)$.

Для полного значения функционала (1.2) получено: $J = J_1 + J_2 + J_3 \approx 2{,}06$.

Заключение

В работе конкретная система линейных нагруженных дифференциальных уравнений, с учетом характера влияния нагруженного слагаемого на динамику процесса, представляется в виде поэтапно меняющихся линейных дифференциальных уравнений. На основе метода функции Ляпунова построена оптимальное стабилизирующие управления и оптимальные движения.

Литература

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы. 2010. 334 с.
3. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004, т. 44, № 4, с. 694–716.
4. Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М. О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Сер.физ.-мат., 2016. № 5, с. 168–175.
5. Барсегян В.Р. Задача управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2017. Т. 21. С. 19-32.
6. Барсегян В.Р., Барсегян Т.В. Задача управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений. Актуальные проблемы механики сплошной среды. Материалы V международной конференции. 02-07 октября 2017, Цахкадзор, Армения, с. 39-40.
7. Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука. 2016. 230 с.
8. Барсегян В.Р., Шагинян С.Г., Барсегян Т.В. Об одной задаче оптимальной стабилизации линейными составными системами. Известия НАН РА, Механика, 2014, т. 67, № 4, с. 40–52.
9. Barseghyan V.R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems // Yugoslav Journal of Operations Resarch. 2012, Vol. 22, № 1, pp. 31-39.
10. Щенникова Е.В., Дружинина О.В., Мулкиджан А.С. Об оптимальной стабилизации многосвязных управляемых систем. Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем, 2010, т. 53(3), с. 99–102.
11. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн. Малкин Н.Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4, М.: Наука, 1966, с. 475-514.
12. Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С. Лекции по теории стабилизации. Свердловск, 1972, 274 с.