Статистическое управление процессами на основе контроля по суженному допуску. Последовательное оценивание параметров процесса

Д.А. Мастеренко,
проф. каф. «Изм. инф.сист. и технол.», д.т.н., metrologycenter@gmail.com,
МГТУ «Станкин», г. Москва

Предложена процедура последовательного вычисления оценок параметров технологического процесса для целей мониторинга его состояния и управления по результатам выборочного контроля по суженному допуску. По сравнению с ранее исследованными оценками, это позволяет упростить и ускорить вычисления. Становится также возможным построение методов последовательного контроля, обеспечивающего меньший средний объём выборки.

The procedure of sequential estimation of technological process parameters from the results of narrow-limits sampling is proposed for process monitoring and control. In comparison with the previously researched estimates, the procedure simplifies and speeds up the calculations. It allows also building of the sequential tests with less average sample volume.

Статистическое управление процессами служит одним из основных инструментов современного менеджмента качества [1,2,3]. Стабильный технологический процесс в крупносерийном и массовом производстве во многих случаях может быть охарактеризован двумя параметрами: уровнем настройки (средним значением показателя качества изготавливаемых изделий) μ и средним квадратическим отклонением показателя качества σ. В целевом (номинальном) состоянии эти параметры должны иметь определённые значения μ_0 и σ_0. Чтобы обнаружить выход из этого состояния, производится выборочный контроль (альтернативный признак) или измерение (количественный признак) показателя качества изготавливаемых изделий и вычисление оценок параметров.

Существует ряд методов, позволяющих обходиться без точных измерений показателя качества, но приблизиться к количественным методам по эффективности. Такие методы основаны на контроле выборки изделий при помощи пары калибров, настроенной на суженное относительно исходного поле допуска и подсчет чисел (n_1, n_2, n_3), равных, соответственно, количествам проконтролированных изделий, у которых значение показателя качества ниже нижней границы суженного поля допуска, укладывается в суженное поле допуска и выше верхней границы поля допуска.

рис.1 иллюстрирует принцип контроля по суженному допуску. Через A и B обозначены, соответственно, нижняя и верхняя границы исходного поля допуска, a и b – границы суженного поля допуска. Целевое значение уровня настройки процесса, равно $\mu_0 = (A+B)/2 = (a+b)/2$. Среднеквадратическое отклонение процесса в номинальном состоянии равно σ_0. Плотность распределения показателя качества изделий, формируемого в процессе, $f(x;\mu,\sigma)$, зависит от μ и σ как от параметров. Во многих случаях распределение с хорошей точностью можно считать нормальным.

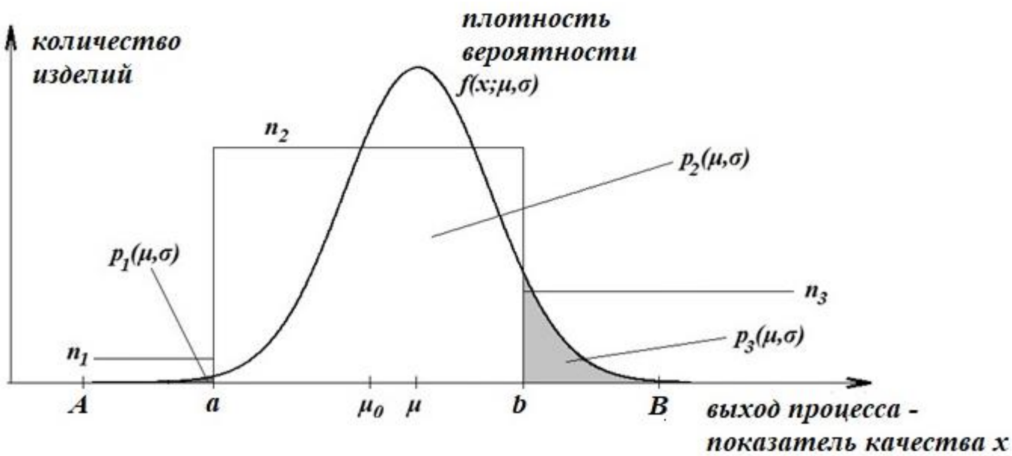

рис.1. Принцип контроля по альтернативному признаку по суженному допуску

Как в целевом состоянии процесса, так и при небольших отклонениях от него вероятность выхода за границы поля допуска A и B незначительна. Это значит, что небольшие выборки с большой вероятностью не будут содержать ни одного несоответствующего изделия и не дадут информации об отклонении процесса от номинального состояния, пока это отклонение не станет достаточно значительным – чего как раз и не следует допускать.

При контроле выборки изделий объемом n единиц по суженным границам a и b подсчитываются количества n_1 и n_3 изделий, у которых значение показателя качества оказывается, соответственно, меньше нижней границы и больше верхней границы суженного поля допуска. Количество изделий, соответствующих суженному полю допуска, составляет n_2, $n = n_1 + n_2 + n_3$.

Предполагая нормальность распределения, можно записать вероятности того, что при заданных значениях уровня настройки μ и среднеквадратического отклонения случайного разброса σ значение показателя качества изделия будет ниже нижней границы, в пределах и выше верхней границы поля допуска:

$$p_1(\mu,\sigma) = P(X < a \mid \mu,\sigma) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),\ p_2(\mu,\sigma) = P(a \le X < b \mid \mu,\sigma) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),$$

$$p_3(\mu,\sigma) = P(X \ge b \mid \mu,\sigma) = 1 - \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right).$$

Для удобства записи сопоставим с результатом контроля некоторую дискретную случайную величину X^d, принимающую значения 1, 2, 3, соответственно, в перечисленных выше случаях, то есть её распределение вероятностей

$$p(j;\mu,\sigma) = P(X^d = j \mid \mu,\sigma) = p_j(\mu,\sigma), \quad j = 1,2,3.$$

Результаты контроля выборки из n изделий представляются последовательностью таких случайных величин $\mathbf{X}_n = (X_1,\ldots,X_n)$, полагаемых независимыми. Совместное распределение вероятностей такого случайного вектора имеет вид:

$$p(\mathbf{x}_n^d;\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i^d;\mu,\sigma) \tag{1}$$

С точки зрения оценивания параметров μ и σ, очередность появления значений 1, 2, 3 роли не играет, важно лишь их общее количество, то есть тройка (n_1,n_2,n_3) представляет собой достаточную статистику, подчиняющуюся полиномиальному распределению:

$$p(n_1,n_2,n_3;\mu,\sigma) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} p_1^{n_1}(\mu,\sigma) p_2^{n_2}(\mu,\sigma) p_3^{n_3}(\mu,\sigma). \tag{2}$$

Обзор статистических методов контроля и управления процессами, основанных на применении суженных и ступенчатых калибров с использованием сформулированной математической модели, приведён в [4].

Автором настоящего доклада разработан подход к статистической обработке наблюдений в ситуациях, когда ширина случайного разброса сопоставима с дискретой средства измерения – так называемых «сильно дискретизованных наблюдений». Дискретность отсчета при этом приводит к существенной потере информации [5]. В рамках данного подхода исследованы свойства оценок, для которых автором предложено название «оценки типа Питмена» [6,7,8,9]. Разработанные методы оценивания применены при разработке высокоточных средств измерений [10], в том числе, координатно-измерительных машин [11] и лазерных интерферометрических систем [12].

Статистическая модель сильно дискретизованных наблюдений также применима к контролю по суженному допуску. Применение разработанных методов статистической обработки позволяет оценивать параметры процесса μ и σ по результатам контроля. Как показано в [13,14,15], на основе полученных оценок можно управлять процессом, что приводит к уменьшению разброса значений показателя качества в изготовленной партии изделий. Другой очевидной возможностью является оценивание показателей воспроизводимости процесса [16], для чего обычно также производятся измерения признака качества.

Согласно развиваемому подходу, оценки параметров процесса ищутся как байесовски оптимальные (в широком смысле), то есть как функции наблюдений, на которых минимизируется функционал риска:

$$R(\hat\mu,\hat\sigma) = \int_{\Theta} E_{\mu,\sigma} W(\hat\mu,\mu,\hat\sigma,\sigma) d\mu\, d\sigma \xrightarrow[\hat\mu,\hat\sigma]{} \min \tag{3}$$

где Θ – некоторое выпуклое множество, заведомо заключающее в себе истинные значения параметров, а функция потерь $W(\hat\mu,\mu,\hat\sigma,\sigma)$ должна определяться спецификой задачи оценивания.

Потери от неточного оценивания уровня настройки естественно принять зависящими от модуля разности оценки и истинного значения $\hat\mu - \mu$. Что касается параметра разброса σ, то его точность оценивания характеризуется не разностью, а отношением $\hat\sigma / \sigma$, его близостью к 1. Скомбинировав квадратические потери по обеим оценкам, взятые с некоторыми положительными весами w_1, w_2, можно предложить функцию:

$$W(\hat\mu,\mu,\hat\sigma,\sigma) = w_1\left(\hat\mu-\mu\right)^2 + w_2\left(\frac{\hat\sigma}{\sigma}-1\right)^2,$$

Минимизация риска (3) с такой функцией потерь приводит к следующим оценкам параметров процесса:

$$\hat\mu = \frac{\int_M \mu\, p_1^{n_1}(\mu,\sigma) p_2^{n_2}(\mu,\sigma) p_3^{n_3}(\mu,\sigma)\, d\mu\, d\sigma}{\int_M p_1^{n_1}(\mu,\sigma) p_2^{n_2}(\mu,\sigma) p_3^{n_3}(\mu,\sigma)\, d\mu\, d\sigma}, \tag{4}$$

$$\hat\sigma = \frac{\int_M \frac{1}{\sigma} p_1^{n_1}(\mu,\sigma) p_2^{n_2}(\mu,\sigma) p_3^{n_3}(\mu,\sigma)\, d\mu\, d\sigma}{\int_M \frac{1}{\sigma^2} p_1^{n_1}(\mu,\sigma) p_2^{n_2}(\mu,\sigma) p_3^{n_3}(\mu,\sigma)\, d\mu\, d\sigma}, \tag{5}$$

Множество M , по которому производится интегрирование, представляет собой прямоугольник, стороны которого суть интервалы возможных значений μ и σ .

Сложности вычисления оценок по формулам (4) и (5) могут быть обойдены при фиксированном и заранее известном объеме выборки n путём предварительного табулирования значений оценок для всевозможных сочетаний n_1, n_2 и n_3 , которые могут иметь место для такого объема. Однако тогда при переходе на план контроля с другим объёмом выборки потребуется использование другой таблицы оценок. Кроме того, построение и применение планов последовательного контроля не предполагает никакого фиксированного наперёд объёма выборки, зато позволяет минимизировать его в среднем. Отметим также, что по мере роста объема выборки число вычислительных операций, а значит, и время вычисления оценок (4), (5) возрастает.

Сокращение и ускорение вычислений было рассмотрено автором доклада в [17,18] для оценок векторного параметра линейной статистической модели вида:

$$Y_i = \mathbf{v}_i \boldsymbol{\theta} + \varepsilon_i \ , \ i = 1,\dots,n,\dots \ ,$$

с функцией потерь на основе евклидовой нормы $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right\|$ (или другой положительно определённой квадратической формы). В этом случае оценка типа Питмена вектора $\boldsymbol{\theta}$ имеет вид:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(n)} = \frac{\int\limits_{\Theta} \boldsymbol{\theta} p(\mathbf{y}_n;\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}}{\int\limits_{\Theta} p(\mathbf{y}_n;\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}} \tag{6}$$

Идея способа заключается в том, чтобы последовательно, по мере получения наблюдений y_1 y_2 , …, y_n , … вычислять вспомогательные функции

$$\pi^{(n+1)}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{p(y_{n+1};\boldsymbol{\theta})\pi^{(n)}(\boldsymbol{\theta})}{\int\limits_{\Theta} p(y_{n+1};\boldsymbol{\theta}')\pi^{(n)}(\boldsymbol{\theta}') d\boldsymbol{\theta}'} \tag{7}$$

начиная с $\pi^{(0)}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 1$, и с их использованием находить оценки вектора параметров:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(n)} = \int\limits_{\Theta} \boldsymbol{\theta} \pi^{(n)}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \tag{8}$$

При программной реализации вместо функций непрерывных переменных в (7), (8) используются дискретные сетки значений, а вместо интегралов − конечные суммы. При достаточно мелком разбиении множества Θ погрешность по сравнению с интегрированием получается приемлемо малой.

В формулах (6) и (8) все компоненты вектора в подынтегральном выражении умножаются на одну и ту же скалярную функцию. В противоположность этому, если даже рассматривать параметры процесса совместно как вектор, в формулах (4), (5) знаменатели различны, поэтому процедуры, аналогичной (7), (8), не получается.

Рассмотрим другую оценку уровня настройки:

$$\hat{\mu} = \frac{\int\limits_{M} \frac{\mu}{\sigma^2} p_1^{n_1}(\mu,\sigma) p_2^{n_2}(\mu,\sigma) p_3^{n_3}(\mu,\sigma)\, d\mu\, d\sigma}{\int\limits_{M} \frac{1}{\sigma^2} p_1^{n_1}(\mu,\sigma) p_2^{n_2}(\mu,\sigma) p_3^{n_3}(\mu,\sigma)\, d\mu\, d\sigma}, \tag{9}$$

а оценку среднеквадратического отклонения перепишем в виде:

$$\hat{\sigma} = \frac{\int\limits_{M} \frac{\sigma}{\sigma^2} p_1^{n_1}(\mu,\sigma) p_2^{n_2}(\mu,\sigma) p_3^{n_3}(\mu,\sigma)\, d\mu\, d\sigma}{\int\limits_{M} \frac{1}{\sigma^2} p_1^{n_1}(\mu,\sigma) p_2^{n_2}(\mu,\sigma) p_3^{n_3}(\mu,\sigma)\, d\mu\, d\sigma} \tag{10}$$

Теперь эти две формулы можно объединить и рассматривать как оценку вектора, в которой по обеим компонентам производится интегрирование с одним и тем же ядром:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} = \frac{\int\limits_{M} \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma \end{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} p_1^{n_1}(\mu,\sigma) p_2^{n_2}(\mu,\sigma) p_3^{n_3}(\mu,\sigma)\, d\mu\, d\sigma}{\int\limits_{M} \frac{1}{\sigma^2} p_1^{n_1}(\mu,\sigma) p_2^{n_2}(\mu,\sigma) p_3^{n_3}(\mu,\sigma)\, d\mu\, d\sigma}$$

Для построения процедуры последовательного оценивания вернёмся к распределению вероятностей (1) и введём вспомогательные функции:

$$\pi^{(n)}(\mu,\sigma) = \frac{p(\mathbf{x}_n^d;\mu,\sigma)\pi^{(0)}(\mu,\sigma)}{\int\limits_{M} \frac{1}{\sigma'^2} p(\mathbf{x}_n^d;\mu',\sigma')\pi^{(0)}(\mu',\sigma') d\mu' d\sigma'},$$

вычисляемые по рекуррентному соотношению:

$$\pi^{(n)}(\mu,\sigma) = \frac{p(x_n^d;\mu,\sigma)\pi^{(n-1)}(\mu,\sigma)}{\int\limits_M \frac{1}{\sigma'^2} p(x_n^d;\mu',\sigma')\pi^{(n-1)}(\mu',\sigma')d\mu' d\sigma'}, \tag{11}$$

причём $\pi^{(0)}(\mu,\sigma) \equiv 1$. После получения очередного результата контроля x_n^d и вычисления функции $\pi^{(n)}(\mu,\sigma)$ можно вычислить оценки параметров:

$$\hat{\mu}^{(n)} = \int\limits_M \frac{\mu}{\sigma^2}\pi^{(n)}(\mu,\sigma)d\mu\, d\sigma \tag{12}$$

$$\hat{\sigma}^{(n)} = \int\limits_M \frac{\sigma}{\sigma^2}\pi^{(n)}(\mu,\sigma)d\mu\, d\sigma = \int\limits_M \frac{1}{\sigma}\pi^{(n)}(\mu,\sigma)d\mu\, d\sigma \tag{13}$$

Соотношения (12), (13) задают те же самые оценки (9), (10), лишь представленные в другой форме.

Заметим также, что оценки (9), (10) получаются согласно общему подходу посредством минимизации риска (3) с функцией потерь:

$$W(\hat{\mu},\mu,\hat{\sigma},\sigma) = w_1\left(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma}\right)^2 + w_2\left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}-1\right)^2$$

При программной реализации вычислений по формулам (11) – (13) значения вспомогательных функций $\pi^{(n)}(\mu,\sigma)$ находятся, с заменой интегралов конечными суммами, в узлах сетки, сформированной точками, размещенными с постоянным шагом на интервалах возможных значений μ и σ. При этом используются массивы значений в этих узлах функций:

$$p_j(\mu,\sigma),\ p_j(\mu,\sigma)/\sigma^2,\ j = 1,2,3,$$

которые можно рассчитать заранее, вне зависимости от объема выборки и каких-либо наблюдений. Вычисление и вспомогательных функций, и оценок сводится к покомпонентному умножению и суммированию массивов.

Таким образом, все наиболее трудоёмкие операции могут быть выполнены заранее, а при последовательном вычислении оценок требуется производить только покомпонентные умножения массивов, суммирование и деление. Это уже достаточно простые операции, которые могут выполняться в реальном времени, в том числе, на карманных компьютерах и прочих подобных устройствах.

Для сравнения свойств оценок в среде Mathlab были проведены расчёты смещений и средних квадратов погрешности оценок $\hat{\mu}^{(n)}$, а также среднего отношения $\hat{\sigma}^{(n)}/\sigma$ для различных истинных значениях параметров μ, σ, калибра с границами $\mu_0 \pm 2\sigma_0$, множества возможных значений параметров $\mathrm{M} = [\mu_0 - 4\sigma_0; \mu_0 + 4\sigma_0] \times [\sigma_0; 2\sigma_0]$ разбиение которого производилось на 200 точек по μ и на 100 точек по σ, объёмов выборки 20, 30 и 40. Результаты расчётов показали, что при указанных условиях свойства оценок действительно близки, и относительное расхождение всех указанных характеристик составляет менее 2% [19]. По результатам расчётов также установлено, что близки оценки (4) и (9).

Таким образом, изложенный в настоящем докладе способ вычисления оценок параметров процесса по результатам контроля калибром, настроенным на суженный допуск, обладает следующими достоинствами:

- вычисление производится последовательно, по мере получения новых наблюдений;
- процедура вычислений достаточно проста и может выполняться в реальном времени на маломощных вычислительных устройствах;
- свойства оценок при вычислении по дискретным массивам и суммам близки к свойствам оценок, полученных интегрированием;
- открывается путь для построения последовательных критериев проверки гипотез относительно параметров процесса, обеспечивающих сокращение среднего объёма выборки.

Литература

1. Статистические методы повышения качества / Под ред. Х. Кумэ / Пер. с англ. М.: Финансы и статистика, 1990.
2. Syed W.A. Statistical process control for total quality // Johns Hopkins APL Technical Digest. 1992. Vol. 13. No. 2. pp. 317-325.
3. Kiran D.R. Total Quality Management. Key Concepts and Case Studies. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2016. 580 pp.
4. Мастеренко Д.А. Обзор методов статистического управления процессами, основанных на группировке изделий при помощи суженных и ступенчатых калибров // Менеджмент качества. 2018. № 2. С. 118-130.
5. Мастеренко Д.А. Информационный аспект статистической обработки сильно дискретизованных наблюдений (байесовский подход) // Вестник МГТУ «Станкин». 2011. № 3 (15). С. 150 - 155.
6. Мастеренко Д.А. О подходах к оцениванию параметров по сильно дискретизованным наблюдениям // Вестник МГТУ «Станкин». 2010. № 3 (11). С. 88 - 94.
7. Мастеренко Д.А. Выбор наилучшей оценки измеряемой величины по сильно дискретизованным наблюдениям // Измерительная техника. 2011. № 7. С. 17 – 20.
8. Мастеренко Д.А. Исследование оценок параметров линейной статистической модели по сильно дискретизованным наблюдениям // Вестник МГТУ «Станкин». 2012. № 3 (22). С. 89 – 93.

9. Мастеренко Д.А. Повышение точности информационно-измерительных систем автоматизированного производства на основе методов статистической обработки сильно дискретизованных наблюдений / Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Москва: МГТУ "Станкин", 2015.
10. Григорьев С.Н., Мастеренко Д.А. Перспективы повышения точности в современном автоматизированном производстве на основе статистических методов обработки сильно дискретизованных наблюдений // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2012. Т. 10. № 9. С. 60 - 63.
11. Григорьев С.Н., Мастеренко Д.А., Ковальский М.Г., Емельянов П.Н. Опыт МГТУ «СТАНКИН» в разработке координатно-измерительных машин субмикронной точности // Контроль. Диагностика. 2012. No. 12. P. 25—30.
12. Мастеренко Д.А., Телешевский В.И. Особенности цифровой обработки измерительной информации при высокоточных линейных и угловых измерениях // Измерительная техника. 2016. № 12. С. 11-14.
13. Мастеренко Д.А. О возможностях применения методов анализа сильно дискретизованных наблюдений при статистическом управлении процессами // Вестник МГТУ Станкин. 2012. № 4 (23). С. 104-107.
14. Мастеренко Д.А. Статистическое управление процессами на основе выборочного контроля по суженному допуску и методов обработки сильно дискретизованных наблюдений // В сборнике: Труды международной конференции "Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM - 2014)" Под редакцией Толока А.В. Москва. 2014. С. 83 - 87.
15. Мастеренко Д.А. Сравнение методов регулирования процессов на основе измерительной информации контроля по альтернативному признаку по суженному допуску // Вестник МГТУ "Станкин". 2017. № 3 (42). С. 74 - 79.
16. Masterenko D.A., Metel A.S. Estimation of process capability indices from the results of limit gauge inspection // Mechanics & Industry. 2017. Vol. 18. No. 7. DOI: https://doi.org/10.1051/meca/2017054 (Published online: 30 December 2017)
17. Мастеренко Д.А. Измерения в реальном времени при наличии сильной дискретизации наблюдений: рекуррентная модификация оценок типа Питмена // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2013. № 4. С. 009-013.
18. Мастеренко Д.А. Статистическая обработка измерительной информации в системах управления при наличии сильной дискретизации наблюдений // В сборнике: Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM - 2012) Труды 12-й Международной конференции. Под редакцией Е.И. Артамонова. Москва. 2012. С. 65-68.
19. Мастеренко Д.А. Последовательное оценивание параметров технологического процесса при статистическом управлении на основе данных контроля по альтернативному признаку по суженным допускам // Вестник МГТУ "СТАНКИН". 2018. № 3 (46). (в печати).