

Применение градиентного движения в задачах поиска пути на основе графических образов ФВМ

М.А. Локтев,
к.т.н., с.н.с., Loktevrus@gmail.com,
ИПУ РАН, г. Москва

Рассматривается подход к организации градиентного движения к цели на основе т.н. графических М-образов функционально-воксельного моделирования. Рассматривается использование пиксельной карты высот как основы для формирования графических М-образов, по которым будет осуществляться градиентное движение.

Approach to the organization of the gradient movement to the purpose on the basis of so-called graphic M-images functional воксельного modeling is considered. Use of the pixel card of heights as bases for formation of graphic M-images on which the gradient movement will be carried out is considered.

Введение

Классическое представление о градиентном движении базируется на нахождении локального экстремума функции и используется при планировании пути в задачах метода потенциалов [1], когда формируется рельеф функции в виде результирующего потенциального поля. Алгоритм основан на формировании уравнения градиентного движения, которое выражается как сумма силы притяжения к цели и сил отталкивания от границ препятствий, в результате которого на каждом шагу рассчитывается потенциальное поле в текущем положении координат [2]. Полученная сила определяет направление движущего объекта к назначенной цели.

Метод функционально-воксельного моделирования (ФВМ) основан на графическом представлении данных об объекте, которое использует аналитический способ описания моделей [3]. Применение ФВМ в задачах построения маршрутов было представлено в ряде работ [4-5]. В них рассматривался подход на основе построения диаграммы Вороного и способ определения рельефных свойств – хребтов и ложин.

Вычисление локальных геометрических характеристик и построение на их основе специальных графических образ-моделей (т.н. М-образов) описывается в работе [3], посвященной подробному описанию функционально-воксельного моделирования. Для создания М-образов требуется линейно аппроксимировать поверхность выбранной функции w_i , где каждой точке пространства сцены соответствует уравнение плоскости $A_i x + B_i y + C_i w + D_i = 0$. Повысив размерность нормали к площадке на одно измерение, получим уравнение:

$$A_i x + B_i y + C_i w + D_i t = 0 \quad (1)$$

На основе уравнения (1) получаем четыре локальных геометрических характеристики, т.е. компоненты нормали (A_i, B_i, C_i, D_i) . Воксельное представление ФВМ-модели предполагает монохромное отображение для каждой локальной характеристики, выраженную значением градации цветовой палитры P в диапазоне $[0, 255]$.

Для построения рельефа функции в задачах поиска пути требуется нахождение множества экстремальных точек, характеризующих решение уравнения. Применение метода *RFM* (*R*-функциональное моделирование) позволяет сформировать единое аналитическое описание сцены и препятствий. Фундаментальные основы этого направления были заложены академиком В. Л. Рвачевым в работе [6], в которых *R*-функции были выделены, как отдельный класс функций, посвященных теоретико-множественному моделированию пространства непрерывной функции.

Применение *RFM* позволяет без труда строить и комбинировать сложные функционально-воксельные геометрические модели. Наиболее распространённой в геометрическом моделировании является система *R*-функций, состоящая из трех уравнений:

$$\begin{cases} f_1 \wedge_{\alpha} f_2 = \frac{1}{\alpha+1} (f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - 2\alpha f_1 f_2}); \\ f_1 \vee_{\alpha} f_2 = \frac{1}{\alpha+1} (f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - 2\alpha f_1 f_2}); \\ \overline{f_1} \equiv -f_1, \end{cases} \quad (2)$$

где f_1 и f_2 – функции, определяющие исходные геометрические объекты. В системе *R*-функций (2) особое место занимает коэффициент α , принимающий значения $-1 < \alpha \leq 1$ и определяющий способ заполнения функционального пространства.

Выбор направления градиентного движения на М-образе

Расчёт направления градиентного спуска приведен в работе [3], который основан на анализе градации оттенков цвета. В качестве примера выбраны растровые М-образы для функции двух аргументов $\omega = f(x, y)$.

На рисунке 1 приведён пример однозначного выбора направления движения точки на основе пары ортогональных М-образов. Точка A имеет начальные координаты i и j , которые являются индексами растровой модели. Из рисунка 1а видно, что значение косинуса нормали к оси Ox в точке A определяет направление движения точки к экстремуму функции под углом α . Однако существует альтернативная точка A' с таким же значением компоненты косинуса нормали, но определяющая новое направление движения под углом $-\alpha$ к оси Ox .

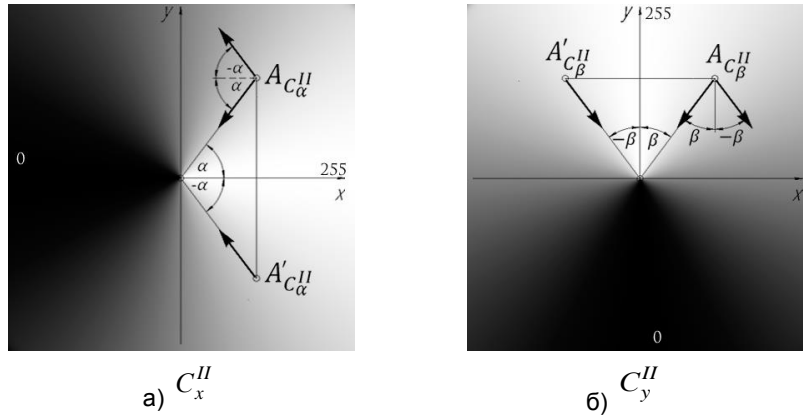


рис. 1 - Выбор направления движения на основе двух M -образов:

В результате появляется неопределенность движения для точки A . Для разрешения такой ситуации следует обратиться к ортогональному образу C_y'' (рис. 1б). Из которого видно, что направление движения точки определяется значением косинуса нормали к оси Oy и направлено под углом $\beta = \pi/2 - \alpha$ к этой оси. Причем, т. A на образе C_y'' , также имеет альтернативное направление под углом $-\beta$ к оси Oy . Таким образом, единственно верное направление смещения точки находится путем сопоставления значений с обоих образов.

Градиентное движение к цели на основе графических образов

Рассмотрим поведение градиента в среде с препятствиями, с помощью организации соответствующей геометрической модели. Аналитическое описание такой модели выполняется с помощью математического аппарата R -функции из уравнения (1). Представим целевую точку с координатами (x_1, y_1) уравнением окружности с единичным (минимальным) радиусом

$$\omega_1 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - r_1^2, \quad (3)$$

где $r_1 \rightarrow 0$ минимальный допустимый радиус. Помимо этого, необходимо ввести дополнительный понижающий коэффициент k_1 для изменения рельефа поверхности функции и организации котловины в целевой точке.

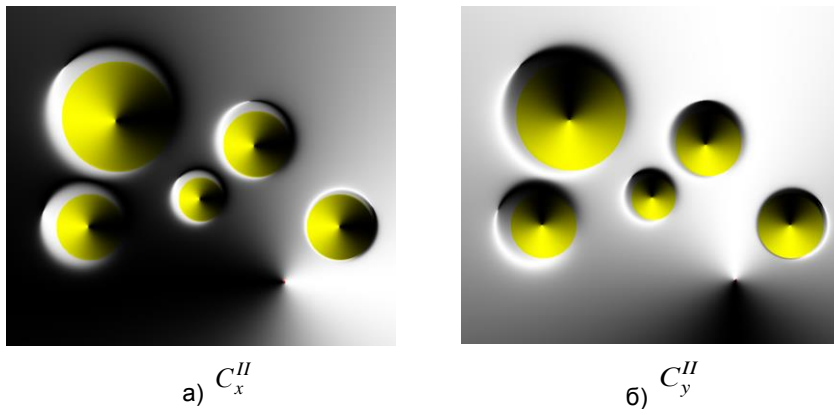


рис. 2 – Представление сцены с препятствиями на основе M -образов

Добавим несколько препятствий с помощью R -функционального объединения функции цели с отрицательной областью препятствий на основе уравнения (2). Причем каждую из препятствий представим окружностью $\omega_i = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 - r_i^2$. Геометрическая R -функциональная модель градиентного движения будет описана в виде: $\omega = k_1(-\omega_1) \vee \omega_2 \vee \dots \vee \omega_i$.

На основании рассмотренного ранее принципа порождения M -образов, получаем пару ортогональных образов C_x'' и C_y'' (рис. 2). Для такой модели будет применяться алгоритм градиентного спуска, поскольку она содержит необходимую информацию о локальных геометрических характеристиках в каждой точке функционального пространства.

Такая модель позволяет найти градиентное движение к цели из любой точки на выбираемой области сцены. Применим полученные M -образы для организации градиентного спуска. Как видно из рисунка 3 все выставленные точки достигают цели, обходя препятствия согласно сформированному рельефу поверхности. Даже в случае отклонения от назначенной траектории, возможно построить новую траектории без перестроения сцены.

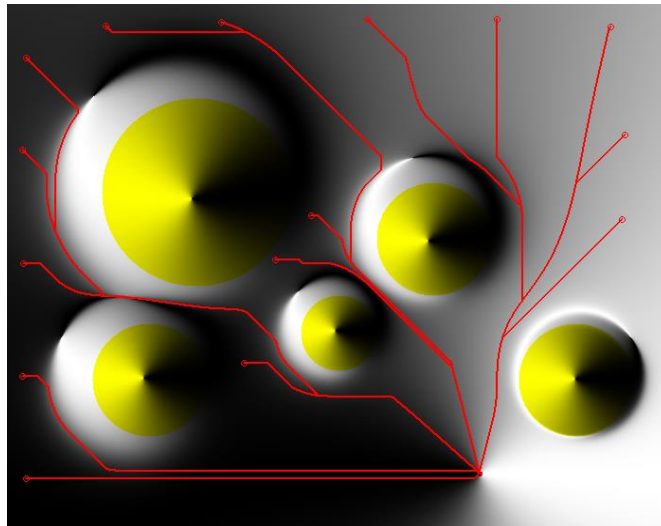


рис. 3 - Построение градиентного спуска на основе М-образов

Использование карты высот при построении М-образов

Несмотря на полноту информации о модели, данный способ имеет ограничения – не всегда получается описать сцену набором уравнений. В задачах поиска пути на входе может оказаться лишь изображение рельефа местности, представленное в виде пиксельной *карты высот*. Карта высот имеет информацию о высоте рельефа в каждой точке изображения (рис 4).



рис. 4. Пример пиксельной карты высот

Определение геометрических характеристик осуществляется через задание касательной плоскости в каждой точке и расчета для них компоненты нормали. Касательная плоскость определяется тремя точками: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_1+1, y_1)$ и $P_3(x_1, y_1+1)$ и значениями функции z_1 , z_2 и z_3 , которые определяются величиной, полученной с карты высот. Уравнение плоскости, построенной по трем заданным точкам в пространстве, формирует матрицу:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_1+1 & y_1 & z_2 & 1 \\ x_1 & y_1+1 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Разложив определитель матрицы (4) по левой строке:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_1 & z_2 & 1 \\ y_1+1 & z_3 & 1 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_1+1 & 1 \\ z_3 & x_1 & 1 \end{vmatrix} y_1 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1+1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1+1 & 1 \end{vmatrix} z_1 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1+1 & y_1 & z_2 \\ x_1 & y_1+1 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

На основании уравнения (5) определяем коэффициенты (A_i , B_i , C_i , D_i) для уравнения плоскости (1), что позволяет получить компоненты нормали и сформировать М-образы для градиентного движения (рис. 5).

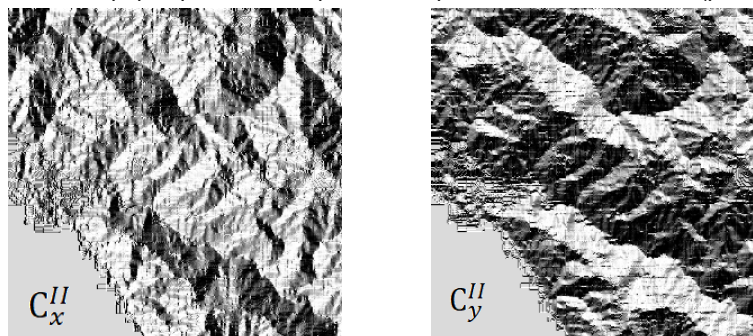


рис. 5. М-образы построенные на основе карты высот

Использование карты высот в качестве входной информации позволяет сформировать функциональное значение для M -образов без использования аналитического представления. Однако точность такого представления может быть не достаточной для построения градиентного движения, что говорит о необходимости работать с изначальной информацией в виде сеточного представления рельефа местности.

Заключение

Использование функционально-воксельного моделирования показало свою эффективность в организации градиентного спуска. Решение осуществляется с помощью порожденных M -образов, которые содержат графическую информацию, достаточную для реализации алгоритма. Принципиальное отличие ФВМ от метода функциональных потенциалов, заключается в использовании пары ортогональных M -образов и отказе от компьютерных дифференциальных вычислений на каждом шаге движения.

Литература

1. Платонов А.К., Карпов И.И., Кирильченко А.А. Метод потенциалов в задаче прокладки трассы// М.: Препринт Института прикладной математики АН СССР. – 1974. – Т. 124. – С. 27.
2. Hwang Y. K., Ahuja N. A potential field approach to path planning// IEEE Transactions on Robotics and Automation. – 1992. – Vol. 8. – №. 1. – P. 23-32.
3. Толлок А.В. «Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании». Под ред. академика РАН С.Н.Васильева. - Москва. ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 112 с.
4. Васильев С.Н., Локтев М.А., Толлок А.В., Толлок Н.Б., Ульянов С.А. К планированию маршрутов в 3d-среде с многовариантной моделью // Труды СПИИРАН. 2016. №2(45). С. 5-25
5. Локтев М.А., Толлок А.В., Функциональный принцип обхода препятствий с применением метода функционально-воксельного моделирования // Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2016. №1 (36). С. 75-80
6. Рвачёв В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552с.