

## Топологическая оптимизация с ограничением напряжений

М.О. Венедиктов,  
 асп., инж. - прогр., venedikm7@gmail.com,  
 МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, ООО НТЦ «АПМ», г. Королёв,  
 В.С. Прокопов,  
 рук. отд. прочн. анализа, к.т.н, vladimir.prokopov@gmail.com,  
 ООО НТЦ «АПМ», г. Королёв

Реализован алгоритм топологической оптимизация с ограничением напряжений для групп элементов. Проанализированы результаты в сравнении с ограничением на глобальное напряжение и показана эффективность рассматриваемого в этой работе подхода. Рассмотрены варианты разбиения на группы элементов.

The algorithm of topological optimization with stresses constraints for groups of elements is implemented in this work. The results are compared with the global stress constraint formulation and the effectiveness of the approach considered in this work is shown. The variants of splitting into groups of elements are considered.

### Введение

На сегодняшний день в технике всё важнее становится максимально эффективное использование материалов. Инструментом, способным помочь при проектировании легковесных конструкций, является топологическая оптимизация – метод автоматизированного получения конструкций, удовлетворяющих заданным критериям.

Часто решается задача нахождения конструкции максимальной жёсткости с ограничением на объём, однако с инженерной точки зрения интереснее найти конструкцию минимальной массы, которая отвечает определенным прочностным характеристикам – ограничению по напряжениям.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу в такой постановке на примере L-образной балки (рис.1). Аналогичная задача решалась в [2]. Размеры: 1000x1000x5 мм, вырез – 600x600 мм. Размеры конечного элемента (КЭ) – 20x20x5 мм. Модуль упругости материала  $E = 71000$  МПа, предел текучести  $\sigma_T = 235$  МПа, коэффициент запаса  $k_T$  – критерий остановки:

максимальное абсолютное изменение всех проектных переменных не должно превышать  $10^{-10}$ , модуль приложенной распределённой нагрузки – 2640 Н. В результате получим значение  $\eta = \frac{M}{M_0}$  для отношения массы оптимизированной конструкции к начальной массе. Пространство проектирования  $\theta$  разбивается на  $N$  элементов и каждому КЭ присваивается проектная переменная  $x_i$  и объёмная доля (ОД)  $\rho_i$  ( $i$  – номер элемента).

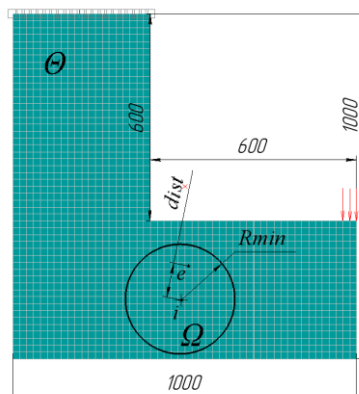


рис. 1 Тестовый пример

В прошлой работе [1] накладывалось ограничение только на глобальное напряжение, что вводило в оптимизационную задачу лишь одно ограничение:

$$\left\{ \begin{array}{l} M(\bar{p}(\bar{x})) = \sum_{i=1}^N \rho_i(\bar{x}) v_i \rho_{0i} \rightarrow \min \\ \sigma_{Глоб}(\bar{x}) \leq \bar{\sigma} \\ 0 \leq x_i \leq 1 \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь  $v_i$  – объём  $i$ -го КЭ,  $\rho_{i0}$  – плотность материала в нём,  $\sigma_{Глоб}(\bar{x})$  – глобальное напряжение (определение будет дано ниже),  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_T}{k_T}$  – допустимое напряжение.

В выражении (1)  $x_i$  и  $\rho_i$  могут принимать значения от 0, при отсутствии материала в КЭ, до 1, при полном задействовании элемента в конструкции.

Основными преимуществами подхода с глобальным напряжением являются скорость выполнения итерации и простота формулировки, однако, поскольку глобальное напряжение вычисляется на основе значений для всех элементов (от полностью нагруженных, до элементов, в которых уже нет материала), обнаруживаются проблемы: существенно снижается сходимости и в полученной конструкции предельные напряжения достигаются лишь в некоторых элементах.

В данной работе применяется подход с введением ограничений по напряжению в нескольких группах элементов, количество ограничений соответствует количеству групп и постановка задачи в таком случае выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} M(\bar{\rho}(\bar{x})) = \sum_{i=1}^N \rho_i(\bar{x}) v_i \rho_{0i} \rightarrow \min \\ \sigma_j^{\Gamma}(\bar{x}) \leq \bar{\sigma}, j = 1 \dots n_{\Gamma} \\ 0 \leq x_i \leq 1 \end{array} \right. \quad (2)$$

Здесь  $n_{\Gamma}$  – количество групп, в которых вычисляется напряжение,  $\sigma_j^{\Gamma}$  – напряжение группы элементов.

В выражении (1)  $x_i$  и  $\rho_i(\bar{x})$  могут принимать значения от 0, при отсутствии материала в КЭ, до 1, при полном задействовании элемента в конструкции. По методу SIMP [3], жёсткость элемента зависит от объемной доли нелинейно, чтобы добиться структуры с чёткими границами. При вычислении жест костных параметров матрица  $E_i$  каждого элемент, домножается на безразмерный коэффициент

$$E_i(\bar{\rho}_i) = \rho_i^p(\bar{x}) E_0 \quad (3)$$

Здесь  $E_0$  – матрица жесткости с  $\rho_i = 1$

С учётом (3) этого можно составить основное уравнение МКЭ (4):

$$K(\bar{\rho}(\bar{x})) \bar{U}(\bar{\rho}(\bar{x})) = \bar{F} \quad (4)$$

Здесь  $K(\bar{\rho}(\bar{x}))$  - глобальная матрица жесткости,  $\bar{U}(\bar{\rho}(\bar{x}))$  – вектор перемещений,  $\bar{F}$  – вектор нагрузок.

Для повышения качества решения рекомендуют (в частности, в [2]) использовать фильтр, определяющий ОД элемента как средневзвешенное проектных переменных соседних элементов:

$$\rho_i(x) = \frac{\sum_{j \in \Omega_i} H_{ij} x_j}{\sum_{j \in \Omega_i} H_{ij}}, \quad i = 1 \dots N. \quad (5)$$

Здесь  $\Omega_i$  – множество номеров элементов, расстояние от центров которых до центра  $i$ -го не превышает  $r_{\min}$ ,  $H_{ij} = r_{\min} - \text{dis}(i, j)$  – весовой коэффициент.

Напряжение  $j$ -ой группы вычисляется по следующей формуле:

$$\sigma_j^{\Gamma} = \left( \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} (\sigma_i^{\text{экв}})^t \right)^{\frac{1}{t}}, \quad j = 1 \dots n_{\Gamma} \quad (6)$$

Здесь  $N_j$  – количество элементов, входящих в  $j$ -ую группу,  $\sigma_j^{\Gamma}$  – напряжение группы элементов,

$\sigma_i^{\text{экв}}$  – эквивалентное напряжение в  $i$  элементе,  $t$  – параметр агрегации. Для глобального напряжения можно просто считать  $n_{\Gamma} = 1$ .

Можно показать, что при  $t \rightarrow \infty$  выражение для  $\sigma_j^{\Gamma}$  дает максимальное значение из  $\sigma_i^{\text{экв}}$  в данной группе и, при любом значении  $t$ ,  $\sigma_j^{\Gamma}$  больше любого из  $\sigma_i^{\text{экв}}$  в данной группе, что гарантирует выполнение условия прочности в любом из конечных элементов.

Для корректной интерпретации напряжений в зависимости объемной доли в данной работе используется  $qr$ -подход [2], позволяющий избавиться от проблемы при вычислении напряжения при нулевой объемной доле и обойти трудности, возникающие при применении данного типа ограничений с использованием градиентных методов оптимизации [5a]. Напряжения в элементе вычисляются по формуле:

$$\bar{\sigma}_i = (\rho_i(\bar{x}))^q E_{0i} C_i \bar{U}_i(\bar{\rho}(\bar{x})) \quad (7)$$

Здесь  $\sigma_i$  – вектор компонент напряжения в элементе,  $E_{0i}$  – матрица свойств материала,  $C_i$  – матрица, связывающая перемещения и деформации. На основе этого выражения вычисляется эквивалентное напряжение для каждого элемента.

Решение оптимизационной задачи производится с помощью метода скользящих асимптот [5], который требует вычисления градиентов целевой функции и ограничений:

$$\frac{\partial M}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho_i(x)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \sigma_j^\Gamma}{\partial x_i} = \sum_{e=1}^N \frac{\partial \sigma_j^\Gamma}{\partial \sigma_e^{жкв}} \left( \frac{\partial \sigma_e^{жкв}}{\partial \sigma_e} \right)^\Gamma \frac{\partial \sigma_e}{\partial x_i}, \quad i = 1..N, j = 1..n_\Gamma. \quad (8)$$

## 2. Результаты

Ниже приведены результаты оптимизации для двух подходов (с глобальным ограничением и ограничением напряжения в нескольких группах элементов). Оптимизация реализована в программном пакете APM Structure 3d с помощью реализации градиентного оптимизатора по методу подвижных асимптот [4] из пакета NLOpt[5].

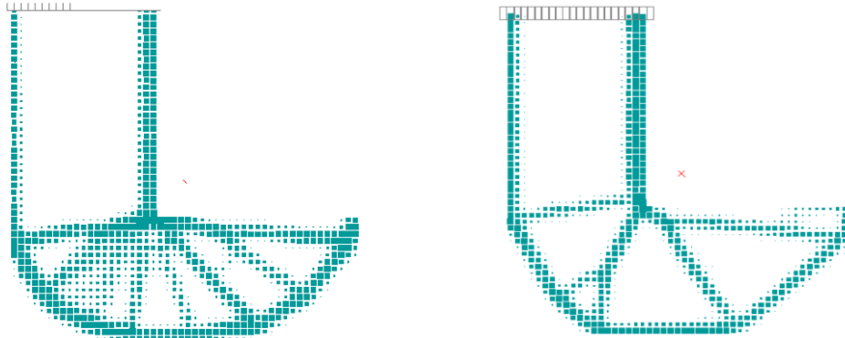


рис. 2 Решения, полученные при заданных условиях остановки по алгоритму с глобальным напряжением (слева) и группами элементов (справа)

Интересным оказывается сравнить результаты решения для двух. Как отмечалось выше, время итерации с одним ограничением немного меньше, в среднем – 0.6 с для данной задачи, против 0.8 с для задачи с 10 группами элементов. Однако, решение в первом случае достигалось за 392 ит. [1], а во втором за 251, что заняло примерно 250 с против 200 с во втором случае, не смотря на увеличение сложности вычислений, задача решается быстрее, что важно при создании коммерческого ПО. Видно, что качество решения намного лучше:  $\eta_1 = 0.455$  против  $\eta_2 = 0.455$  для второго, где также сглажен концентратор напряжения.

На ход решения влияет и алгоритм разбивки элементов на группы. Было протестировано три подхода: элементы выделялись в группы по геометрическим соображениям, хаотично и по уровню напряжений. Начальные распределения приведены ниже (рис. 3). Последний алгоритм предполагает перегруппировку на каждой итерации.

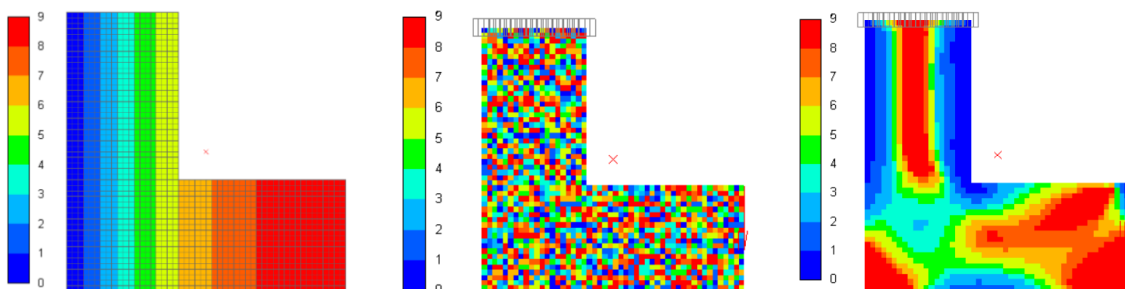


рис. 3 Примеры разбивки элементов на 10 групп для первой итерации: геометрически (слева), хаотично (посередине), по уровню напряжений (справа)

Оценивалось только количество итераций, за которое достигалось решение: 745 для первой стратегии, 518 для второй и 200 для последней. Наиболее эффективным оказалось выделение элементов по уровню напряжений в связи с тем, что в группы объединяются элементы с близкими значениями напряжений и  $\sigma_j^e$  выражает их значение наиболее точно.

## Выводы

В данной работе реализован алгоритм топологической оптимизации минимизации массы с ограничениями на напряжения для нескольких групп элементов в конструкции. Не смотря на увеличившуюся вычислительную сложность, решения получаются за меньшее количество итераций, что наиболее предпочтительно в коммерческом ПО, показано что выбор метода разбиения влияет на результаты оптимизации.

## Литература

1. Венедиктов М.О., Фёдоров Д.В., Прокопов В.С. Выбор рациональных параметров и учёт технологических ограничений в методе топологической оптимизации // 2-я Всероссийская научно-техническая конференция "Механика и математическое моделирование в технике" (22-23 ноября 2017 г.)
2. Holmberg E., Torstenfelt B., Klarbring A. Stress constrained topology optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization, July 2013, V. 48, Issue 1, P. 33–47.
3. Bendsoe M.P., Sigmund O. Topology Optimization. Theory, Methods and Applications. Springer, 2003.
4. Svanberg K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, V. 24, Issue 2, P. 359–373.
5. Steven G. Johnson, The NLOpt nonlinear-optimization package, (Available from: <http://ab-initio.mit.edu/nlopt>)