

# Амплитуды тестовых сигналов для построения интегральных моделей динамики объектов тепло- и электроэнергетики<sup>1</sup>

С.В. Солодуша,  
в. н. с., к. ф.-м. н., доц., [solodusha@isem.irk.ru](mailto:solodusha@isem.irk.ru),  
ИЭСМ СО РАН, г. Иркутск

Рассмотрена задача оптимального в некотором естественном смысле выбора амплитуды (высоты)  $\alpha$  тестовых сигналов для идентификации ядер Вольтерра при описании нелинейной динамики тепло- и электроэнергетических объектов с помощью полиномов Вольтерра. Приведено решение этой задачи на различных множествах допустимых сигналов для полиномов второй и третьей степени. В качестве «эталонных» рассмотрены математические модели переходных процессов в элементе теплообменного аппарата и в ветроэнергетической установке с горизонтальной осью вращения. Получено согласование ограничений на амплитуды как для тестовой математической модели, так и для моделей переходных процессов тепло- и электроэнергетических объектов. Анализ полученных результатов позволяет дать рекомендации по выбору  $\alpha$  в диапазоне  $0,75B \div 0,9B$ , где  $B$  – высота произвольных входных возмущений.

This paper addresses the problem of the optimal (in some natural sense) choice of the amplitude (height) of test signals  $\alpha$  for the Volterra kernels identification in describing the nonlinear dynamics of heat and electric power objects using Volterra polynomials. We solve this problem on various sets of feasible signals for polynomials of the second and third degree. We consider the mathematical models of transient processes in the heat exchanger element and in a wind turbine with a horizontal axis of rotation as the "reference". We obtained the coordination of the amplitude constraints both for the test mathematical model and for transient processes models of heat and electric power objects. An analysis of the results allows us to give recommendations on the choice of  $\alpha$  in the range  $0,75B \div 0,9B$ , where  $B$  is the height of arbitrary input disturbances.

## Введение

В теории математического моделирования нелинейных динамических систем хорошо известен универсальный аппарат интегро-степенных рядов Вольтерра. Он основан на представлении отклика  $y(t)$  динамической системы типа вход-выход на входной сигнал  $x(t)$  в виде полинома Вольтерра [1]:

$$y(t) = \sum_{m=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t K_m(s_1, \dots, s_m) \prod_{i=1}^m x(t-s_i) ds_i, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

В (1) ядра Вольтерра  $K_m(s_1, \dots, s_m)$  в силу скалярности  $x(t)$  симметричны по переменным  $s_1, \dots, s_m$  и подлежат идентификации по тем или иным наборам  $x(t), y(t)$ . Сложность практического применения (1) состоит в том, что для однозначного восстановления  $m$ -мерного континуума неизвестных значений  $K_m(s_1, \dots, s_m)$ ,  $0 \leq s_m \leq T$ , необходимо задание откликов  $y_m(t, \omega_1, \dots, \omega_{m-1})$  на  $(m-1)$ -параметрическое семейство тестовых возмущений  $x_{\omega_1, \dots, \omega_{m-1}}(t)$ ,  $0 \leq t, \omega_i \leq T$ ,  $i = 1, m-1$ . Этим объясняется пристальное внимание многих авторов к проблеме идентификации (см., например, монографии [2-5]).

Статья продолжает исследования, начатые в [6]. Методика [5, 6] основана на задании семейства тестовых сигналов в виде специальных линейных комбинаций функций Хевисайда с отклоняющимся аргументом. При этом исходная задача сводится к решению неклассических многомерных линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода, допускающих явные формулы обращения. Для данной работы представляет интерес проблема выбора амплитуд  $\alpha$  тестовых сигналов, используемых для идентификации ядер Вольтерра в (1) при  $N=2, 3$ .

## 1. Квадратичные модели эталонных динамических систем

Выберем в (1)  $N=2$ :

$$y_{quadr}(t) = \int_0^t K_1(s)x(t-s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(s_1, s_2) \prod_{j=1}^2 x(t-s_j) ds_j, \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Выполним построение квадратичных полиномов Вольтерра (2). Построить модель в виде (2) – означает решить тем или иным способом задачу идентификации ядер Вольтерра  $K_1, K_2$ . Воспользуемся для этого методикой [5], используя тестовые сигналы с амплитудами  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ , удовлетворяющими условию [6]:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad (3)$$

<sup>1</sup> Результаты статьи получены при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ №15-01-01425а и в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН, проект №АААА-А17-117030310446-6.

где для определенности  $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha > 0$ . Обозначим через  $y_{et}^\beta(t, \omega_1)$  и  $y_{quadr}^{\alpha, \beta}(t, \omega_1)$  отклики некоторой эталонной и квадратичной моделей на допустимые входные воздействия с амплитудой  $\beta$  (отличной в общем случае от  $\alpha$ ):

$$x_{\omega_1}^\beta(t) \in X(B, T) = \{\beta \cdot [e(t) - e(t - \omega_1)], \beta \in [-B, B], 0 \leq \omega_1 \leq t \leq T\}. \quad (4)$$

В (4)  $e(t)$  - функция Хевисайда. Во многих физических приложениях важную роль играет значение отклика системы в конце рассматриваемого переходного процесса ( $t = T$ ), поэтому выберем критерий точности модели в следующем виде:

$$\max_{x_{\omega_1}^\beta \in X(B, T)} |y_{et}^\beta(T, \omega_1) - y_{quadr}^{\alpha, \beta}(T, \omega_1)| \rightarrow \min_{\alpha \in [0, B]}.$$

Фактически разность  $y_{et}^\beta(T, \omega_1) - y_{quadr}^{\alpha, \beta}(T, \omega_1)$  есть некоторая функция параметров  $\alpha, \beta, \omega_1$ . Тогда

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha \in [0, B]} \left\{ \max_{\substack{\omega_1 \in [0, T] \\ \beta \in [-B, B]}} |N(\alpha, \beta, \omega_1)| \right\}, \quad (5)$$

где

$$N(\alpha, \beta, \omega_1) = y_{et}^\beta(T, \omega_1) - y_{quadr}^{\alpha, \beta}(T, \omega_1).$$

Аналитическое решение экстремальной задачи (5) применительно к модельной динамической системе вида

$$y^N(t) = \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} \left( \int_0^t x(s) ds \right)^m \quad (6)$$

при  $N = 3$  и входных сигналах (4) приведено в статье [6]. Численное решение задачи (5) для случаев  $N = \overline{4, 10}$  выполнено в работе [7]. Перейдем к решению поставленной задачи для эталонных динамических систем тепло- и электроэнергетики. Остановимся подробнее на результатах применения программно-вычислительного комплекса (ПВК) «Динамика» [8] для математического моделирования процесса теплообмена с помощью эталонного отклика

$$y_{et}(t) \equiv \Delta i(t) = \frac{Q_0}{D_0} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t \Delta D(\eta) \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 \int_0^\eta D(\zeta) d\zeta} & -\lambda_2 \int_0^\eta D(\zeta) d\zeta \\ \eta & \eta \end{pmatrix} d\eta. \quad (7)$$

В (7)  $t$  - время (с),  $D(t)$  - расход вещества (кг/с),  $Q(t)$  - полная тепловая нагрузка (кВт),  $i(t)$  - энтальпия (кДж/кг), индексами «0» обозначены начальные параметры,  $\Delta$  - отклонение от начального значения, например,  $\Delta D(t) = D(t) - D_0$ . На сигналах  $\Delta D_{\omega_1}^{\pm \alpha}(t) \equiv x_{\omega_1}^{\pm \alpha}(t)$  вида (4) формула (7) дает требуемый для идентификации ядер Вольтерра набор откликов  $\Delta i_{et}^{\pm \alpha}(t, \omega_1) \equiv y_{et}^{\pm \alpha}(t, \omega_1)$ . Учитывая (3) и предположение относительно  $\alpha$ , проводим дискретизацию откликов  $y^{+\alpha}(t, \omega_1)$  и  $y^{-\alpha}(t, \omega_1)$  с шагом  $h = \frac{T}{n}$ . Пусть  $t_i = ih, t_j = \omega_1 = jh, 1 \leq j \leq i \leq n$ . Применение

конечно-разностных аналогов явных формул обращения [5] дает сеточные функции  $K_1^h \left( t_{i-\frac{1}{2}} \right), K_2^h \left( t_{i-\frac{1}{2}}, t_{i-j-\frac{1}{2}} \right)$ . Аппроксимируя интегралы в (2) квадратурными формулами, получаем дискретную функцию  $y_{quadr}^{\alpha, \beta}(T, t_j)$ . В качестве целевой функции принимаем модуль невязки между значениями  $y_{et}^\beta(T, t_j)$  и  $y_{quadr}^{\alpha, \beta}(T, t_j)$  при  $j \leq i$ . Считаем допустимым воздействие  $\Delta D_{\omega_1}^\beta(t) \in X(B, T)$  из (4), где  $\beta \in [0, B]$ ;  $B = 25\%D_0, 50\%D_0$ ;  $m = 2$ ;  $T = 30, 60, 120$  (с),  $D_0 = 0,16$  (кг/с).

Специфика  $|N(\alpha, \beta, \omega_1)|$  состоит в том, что  $\beta_{max}$  достигается либо внутри, либо на краю отрезка  $[0, B]$ . При этом оптимальное значение  $\alpha$  выбирается из условия равенства внутренних экстремумов и ее значений на концах отрезка. Расчеты показали, что  $\omega_{1max} = T, \beta_{max} = \{B, B\}$ , где  $B \approx \frac{B}{2}$ . Сеточный аналог функции  $|N(\alpha^*, \beta, \omega_1)|$  для  $h = 1$  (с);  $T = 60$  (с);  $B = 25\%D_0 = 0,04$ ;  $\alpha^* = 0,0342$ ;  $\omega_1 = T$ ;  $B = 0,475B$  приведен на рис. 1.

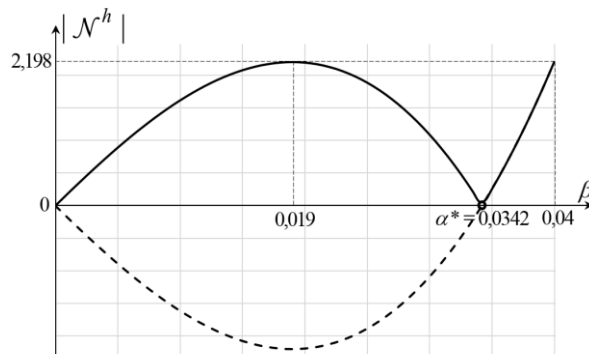


рис. 1. Функция  $|N^h(\alpha^*, \beta, \omega_1)|$

В табл. 1 указаны некоторые численные результаты по оптимизации, причем первая строка соответствует случаю  $B = 25\%D_0$ , вторая случаю  $B = 50\%D_0$ .

Таблица 1

T	30	60	120
$\alpha_1^*$	0,878 B	0,880 B	0,880 B
$\alpha_2^*$	0,893 B	0,898 B	0,898 B

Отметим, что равенство (3) и значения, приведенные в табл. 1, согласуются с результатами, полученными в [6] для эталона (6) при  $N = 3$ , где

$$\omega_{1\max} = T, \beta_{\max} = \left\{ B, \frac{B}{2} \right\}; 0,866B \leq \alpha^* \leq 0,878B.$$

Это свидетельствует об универсальном характере полученных результатов. Табл. 2 иллюстрирует эффект использования  $\alpha^* = 0,880B$  (см. табл. 1) в сравнении с произвольными  $\alpha$  при моделировании отклика динамической системы на входное воздействие  $\Delta D(t) = B \sin\left(\frac{2\pi}{35}t\right)$ ,  $B = 25\%D_0$ ,  $t \in [0, 60]$ .

Таблица 2

$\alpha$	$\alpha^*$	B	$\frac{B}{2}$	$\frac{B}{4}$
$\varepsilon^\alpha$	0,088	1,304	2,553	3,458
$\square^\alpha$	0,090	1,305	2,613	3,540

Здесь  $\varepsilon^\alpha = |y_{et}(T) - y_{quadr}^\alpha(T)|$ ,  $\Delta^\alpha = \frac{|y_{et}(T) - y_{quadr}^\alpha(T)|}{y_{et}(T)} \cdot 100\%$ . Анализ результатов, полученных для тестовых воздействий (4) (см. табл. 1) и

$$x_{\omega_1, T-\omega_1}^\beta(t) = \beta(e(t) - 2e(t - \omega_1) + e(t - T)), \quad 0 \leq \omega_1 \leq t \leq T,$$

позволяет рекомендовать при идентификации ядер Вольтерра в (2) выбирать амплитуду  $\alpha$  тестовых сигналов в диапазоне  $0,75B \div 0,9B$ .

Учитывая данный вывод, рассмотрим (5) для нелинейной динамики ветроэнергетической установки с горизонтальной осью вращения [9], эталонная модель которой позволяет исследовать влияние входных воздействий: скорости ветра  $\Delta V(t)$  (м/с) и угла поворота лопасти  $\Delta b(t)$  (град) на выход  $\Delta \omega_r(t)$  - угловую скорость вращения элементов ветроустановки (град/с). Пусть теперь  $y_{et}^\beta(t, \omega_1)$  - отклики  $\Delta \omega_r^\beta(t, \omega_1)$  эталонной модели ветроэнергетической установки при входных воздействиях  $\Delta b = 0$  (град) и  $\Delta V_{\omega_1}^\beta(t)$  вида (4), где  $\omega_1 = T$ . Дискретный аналог  $y_{quadr}^{\alpha, \beta}(T, t_j)$  в (5) получаем, как и в предыдущем случае, с помощью ПВК «Динамика» при  $V_0 = 10$  (м/с),  $\omega_{0r} = 78,15$  (град/с),  $b_0 = 10$  (град),  $h = 1$  (с),  $T = 20$  (с). Сеточный аналог функции  $|\mathcal{N}(\alpha^*, \beta, \omega_1)|$  для  $\alpha^* \approx 0,833B$ ,  $B = 60\%V_0$ ,  $B = 0,417B$  приведен на рис. 2.

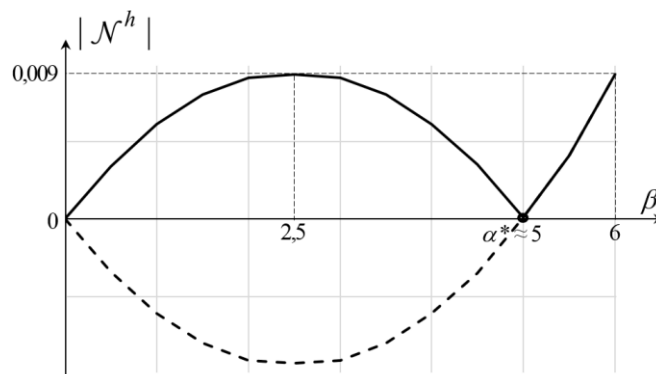


рис. 2. Функция  $|\mathcal{N}^h(\alpha^*, \beta, \omega_1)|$

## 2. Кубичные модели эталонных динамических систем

Перейдём теперь к вопросу о выборе оптимальных амплитуд при построении кубичных моделей Вольтерра с учетом условия [10] на амплитуды тестовых сигналов

$$\alpha_1 \alpha_2 = \pm 2\alpha_i^2, \quad i = 1, 2,$$

где для определенности  $i = 1$ ,  $\alpha_2 = \alpha > 0$ ,  $|\alpha_2| > |\alpha_1|$ . Пусть  $y_{et}^\beta(t, \omega_1)$  и  $y_{cub}^{N=4, \alpha, \beta}(t, \omega_1)$  обозначают отклики эталонной модели (6), где  $N = 4$ , и кубичной модели

$$y_{cub}(t) = \int_0^t K_1(s)x(t-s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(s_1, s_2) \prod_{j=1}^2 x(t-s_j) ds_j + \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(s_1, s_2, s_3) \prod_{j=1}^3 x(t-s_j) ds_j \quad (8)$$

на допустимые входные воздействия (4). Применяя описанную в [10] методику идентификации ядер Вольтерра, вместо (8) получим

$$y_{cub}^{N=4}(t) = \int_0^t x(t-s)ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t (1 + \frac{1}{2} \alpha_i^2 (s_1 - s_2)^2) \prod_{j=1}^2 x(t-s_j) ds_j + \frac{1}{6} \int_0^t \int_0^t \int_0^t (1 + \alpha_i (s_1 - 2s_2 + s_3)) \prod_{j=1}^3 x(t-s_j) ds_j,$$

где  $\alpha_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ . По аналогии с (5) сформулируем задачу о выборе  $\alpha$  для идентификации ядер Вольтерра в (8) в следующем виде:

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha \in [0, B]} \left\{ \max_{\substack{\omega_1 \in [0, T] \\ \beta \in [-B, B]}} |\mathcal{N}(\alpha, \beta, \omega_1)| \right\}. \quad (9)$$

Отметим, что выбор  $x_{\omega_1}^{\beta}(t)$  из достаточно узкого множества допустимых входных сигналов (4) продиктован возможностью получения аналитического решения минимаксной задачи (9). Прямой подсчет разности дает

$$\mathcal{N}(\alpha, \beta, \omega_1) = \frac{\beta^2 (\alpha^2 - \beta^2)}{24} \omega_1^4. \quad (10)$$

Максимум (10) достигается при

$$\beta_{\max} = \left\{ -B, -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, B \right\}, \quad \omega_{1\max} = T,$$

поэтому условие согласования

$$\mathcal{N}\left(\alpha, \pm \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, T\right) = -\mathcal{N}(\alpha, \pm B, T)$$

дает уравнение  $\alpha^4 + 4B^2\alpha^2 - 4B^4 = 0$  с единственным корнем в допустимой области

$$\alpha^* = \sqrt{-2 + 2\sqrt{2}B} \approx 0,9102B,$$

который и является решением экстремальной задачи (9), причем

$$|\mathcal{N}(\alpha^*, \beta_{\max}, \omega_{1\max})| \approx 0,00715B^4T^4.$$

График модуля функции  $\mathcal{N}(\alpha^*, \beta_{\max}, \omega_{1\max})$  изображен на рис. 3. Расчеты проведены при  $T = 1$ ,  $\beta \in [-1, 1]$ .

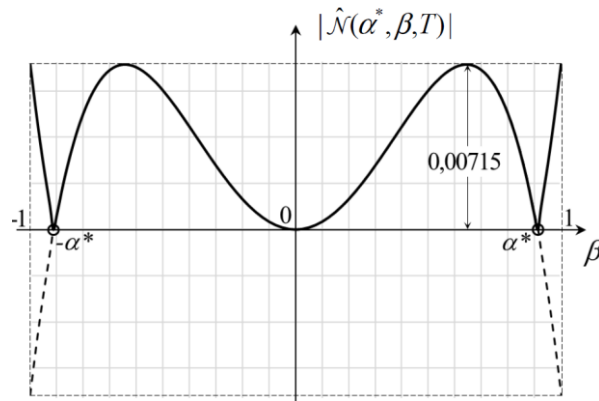


рис. 3. Модуль невязки  $\mathcal{N}(\alpha^*, \beta, 1)$

Использование кубических полиномов Вольтерра, моделирующих нелинейные процессы теплообмена на базе (7), показало важность разбиения  $[-B, B]$  в (9) на подобласти  $[-B, 0]$  и  $[0, B]$ , так что выбор  $\alpha$  для идентификации ядер Вольтерра редуцируется к решению

$$\alpha_1^* = \arg \min_{\alpha \in [0, B]} \left\{ \max_{\substack{\omega_1 \in [0, T] \\ \beta \in [0, B]}} |\mathcal{N}(\alpha, \beta, \omega_1)| \right\}, \quad \alpha_2^* = \arg \min_{\alpha \in [0, B]} \left\{ \max_{\substack{\omega_1 \in [0, T] \\ \beta \in [-B, 0]}} |\mathcal{N}(\alpha, \beta, \omega_1)| \right\}.$$

Проиллюстрируем специфику применения двух моделей (8), идентификация ядер Вольтерра в которых выполняется с учетом принадлежности амплитуды  $\beta$  из  $\Delta D^{\beta}(t)$ ,  $t \in [0, 60]$ , одной из подобластей  $[-B, 0]$  или  $[0, B]$ , где

$B = 25\%D_0$ . На рис. 4 даны сеточные аналоги функций  $\mathcal{N}(\alpha_1^*, \beta, \frac{T}{2})$  и  $\mathcal{N}(\alpha_2^*, \beta, \frac{T}{2})$  для допустимых входных

сигналов  $\Delta D_{\omega_1=\frac{T}{2}}^{\beta}(t)$  вида (4). График «Line 1» соответствует случаю, когда  $\beta \in [-B, 0]$ , а график «Line 2» - когда

$\beta \in [0, B]$ . Получено, что

$$\left| \mathcal{N} \left( \alpha_1^*, \beta_{1_{\max}}, \frac{T}{2} \right) \right| = \left| \mathcal{N} \left( \alpha_1^*, B, \frac{T}{2} \right) \right| = 0,0391,$$

$$\left| \mathcal{N} \left( \alpha_2^*, \beta_{2_{\max}}, \frac{T}{2} \right) \right| = \left| \mathcal{N} \left( \alpha_2^*, -B, \frac{T}{2} \right) \right| = 0,0063,$$

где  $\beta_{1_{\max}} = 0,017$ ;  $\beta_{2_{\max}} = -0,015$ ;  $\alpha_1^* = 0,0332$ ;  $\alpha_2^* = -0,0315$ .

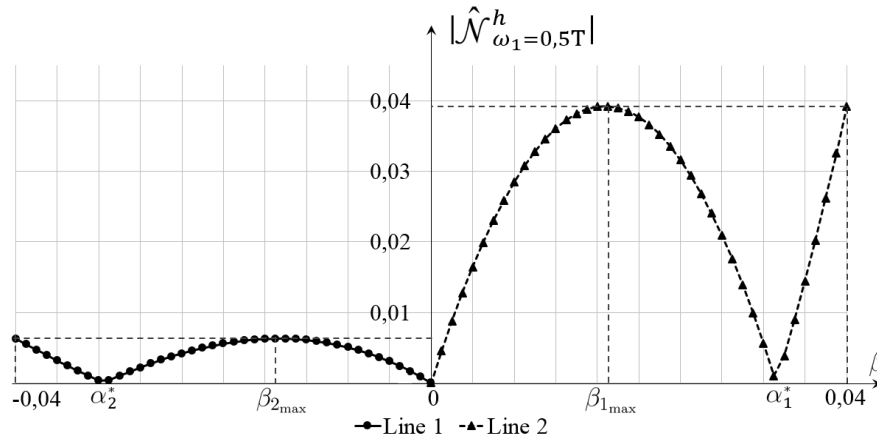


рис. 4. Модуль невязки  $\mathcal{N}$  при  $\beta \in [-B, B]$ ,  $\omega_1 = 0,5T$

### Заключение

В работе на примере некоторых эталонных динамических систем типа вход-выход рассматривается способ выбора амплитуд тестовых сигналов, используемых при идентификации ядер Вольтерра в квадратичных и кубичных полиномах. На модельном примере проиллюстрировано повышение точности моделирования квадратичными полиномами Вольтерра за счет использования при решении задачи идентификации рекомендуемой амплитуды тестовых сигналов. Получено согласование ограничений на амплитуды как для тестовой математической модели, так и для моделей переходных процессов тепло- и электроэнергетических объектов, что свидетельствует об универсальности результатов.

### Литература

1. Volterra V. A Theory of Functionals, Integral and Integro-Differential Equations. New York: Dover Publ. 1959.
2. Пупков Ю.С., Киселев О.Н., Петров Н.П. Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем. М.: Энергия, 1976.
3. Данилов Л.В., Матханов Л.Н., Филиппов В.С. Теория нелинейных динамических цепей. М.: Энергоиздат, 1990.
4. Волков Н.В. Функциональные ряды в задачах динамики автоматизированных систем. М.: Янус-К, 2001.
5. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999.
6. Апарцин А.С., Солодуша С.В. Об оптимизации амплитуд тестовых сигналов при идентификации ядер Вольтерра // АИТ. 2004. № 3. С. 116–124.
7. Ситникова Е.Н. Оптимизация амплитуд тестовых сигналов при идентификации нелинейной динамической системы // Системные исследования в энергетике. Труды молодых ученых СО РАН. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2003. Вып. 33. С. 184–189.
8. Солодуша С.В. Программный комплекс для моделирования систем тепло- и электроэнергетики // Труды XVI-ой Междунар. конф. «Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM–2016)». М.: ООО «Аналитик», 2016. С. 314–318.
9. Герасимов Д.О., Солодуша С.В., Сулосов К.В. Разработка алгоритма функционирования системы управления ветроэнергетическими установками // Известия РАН. Энергетика. 2016. № 6. С. 68–78.
10. Солодуша С.В. К проблеме идентификации интегральных моделей нелинейных динамических систем // Оптимизация, управление, интеллект. 2005. № 3(11). С. 39–46.