Об условиях управляемости и наблюдаемости многоэтапных динамических процессов

В.Р. Барсегян,
в.н.с., проф. каф. механ. ЕГУ, д.ф.-м.н., проф., barseghyan@sci.am,
Институт механики НАН РА, ЕГУ, г. Ереван, АРМЕНИЯ

Рассматриваются вопросы управляемости и наблюдаемости многоэтапных динамических процессов когда размерности фазового вектора, векторов управления и наблюдения поэтапно могут менятся. Приведены необходимые и достаточные условия вполне управляемости и вполне наблюдаемости многоэтапных линейных динамических процессов. Для многоэтапных стационарных систем эти условия (критерии) выраженны непосредственно через исходные параметры системы и сравнимы по завершенности с аналогичными условиями Калмана. Выявлено, что вследствие использования полезных свойств каждой из подсистем можно получить свойства вполне управляемости или вполне наблюдаемости многоэтапного процесса, которым возможно не обладает ни одна из этих подсистем. Показано, что невырожденное линейное стационарное преобразование не влияет на свойство управляемости и наблюдаемости таких систем.

The issues of controllability and observability of multi-stage dynamic processes are considered when the dimensions of the phase vector, control and observation vectors change stage by stage. Necessary and sufficient conditions for complete controllability and observability of multi-stage linear processes are given. For stationary case these conditions are expressed through initial parameters and are comparable with analogous Kalman conditions. It is revealed that, as a consequence of usage of useful properties of each of the subsystems, it is possible to obtain properties of complete controllability or complete observability of multi-stage process, while none of those subsystems may possess those properties.

Введение

Многие процессы управления из различных областей науки и техники предъявляют все новые требования к математическим моделям процессов управления и наблюдения, ставят новые задачи более широкого класса динамических систем. В частности, одной из важнейших задач развития высокотехнологического производства является задача повышения уровня автоматизации путем использования автоматизированных технологических процессов управления непрерывного и поэтапного действия.

Для проектирования и исследования автоматизированных технологических процессов, разными авторами, в частности, предложены математические модели более сложных динамических систем управления фиксированной структуры с выделенной переменной структурой и возможностью в них мгновенного изменения значения параметров и мгновенной смены поведения. Кроме того многие современные автоматизированные технологические процессы непрерывного и поэтапного действия моделируются как управляемые многоэтапные динамические системы.

Как в обычных задачах управления [1-4], так и в задачах управления и наблюдения многоэтапными динамическими процессами принципиальными являются вопросы управляемости и наблюдаемости таких систем. Некоторые вопросы управляемости и наблюдаемости систем переменной структуры и кусочно линейых импульсных систем исследованы, в частности, в работах [5-21]. И несмотря на возрастающий интерес к многоэтапным динамическим системам, достигнутых успехах в развитии теории, ощущается недостаток конструктивных методов и практических инструментов для исследования управляемости и наблюдаемости таких динамических систем. В частности, необходимо иметь критерии управляемости и наблюдаемости для многоэтапных динамических систем, сравнимые по завершенности с критериями Калмана. Поэтому возникает необходимость изучения фундаментальных проблем математической теории управления и наблюдения таких систем, в частности, составных или поэтапно меняющихся динамических систем, в которых эффектом многоэтапности пренебречь нельзя.

В данной работе получены необходимые и достаточные условия (критерии) вполне управляемости и вполне наблюдаемости многоэтапных линейных динамических процессов с изменением размерности фазового вектора и вектора управления, которые в стационарном стационарном случае выражены непосредственно через исходные параметры системы и сравнимы по завершенности с известными условиями Калмана. Выявлено, что вследствие использования полезных свойств каждой из подсистем можно получить новые свойства вполне управляемости и вполне наблюдаемости многоэтапного динамического процесса, которыми возможно не обладает ни одна из этих подсистем. Показан аналог принципа двойственности Калмана, связывающего понятия управляемости и наблюдаемости. Критерии вполне управляемости и вполне наблюдаемости иллюстрированы на примерах конкретных поэтапно меняющихся систем, составляя матрицы управляемости и наблюдаемости. Показано, что невырожденное линейное стационарное преобразование не влияет на свойство управляемости и наблюдаемости таких систем.

1. Постановка задачи

Рассматривается многоэтапный процесс, динамика которой на интервале времени $t_{k-1} \le t \le t_k$, $k = 1,...,m$ описывается n_k -мерными линейными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}^{(k)} = A_k(t)x^{(k)} + B_k(t)u^{(k)} \tag{1}$$

с промежуточными условиями связи

$$E_k x^{(k)}(t_k) + F_k x^{(k+1)}(t_k) = \beta_k . \tag{2}$$

Предполагается, что заданы моменты времени t_k, $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = T$.

Здесь $x^{(k)}(t) \in R^{n_k}$, $x^{(k)}$ -фазовый вектор системы; $A_k(t)$, $B_k(t)$ $(k = 1,...,m)$ матрицы параметров системы (модели процесса), $u^{(k)}(t)$ управляющее воздействие, соответственно, с размерностями $A_k(t) - (n_k \times n_k)$, $B_k(t) - (n_k \times r_k)$, $u^{(k)}(t) - (r_k \times 1)$, $E_k - (n_{k+1} \times n_k)$-мерная, $F_k - (n_{k+1} \times n_{k+1})$-мерная матрицы, $\beta_k - (n_k \times 1)$-мерный вектор-столбец. Предполагается, что элементы матрицы функций $A_k(t)$, $B_k(t)$ и вектор-столбца $u^{(k)}(t)$ являются непрерывными функциями. Предполагается также, что матрицы E_k, F_k и векторы β_k известны, а матрицы F_k такие, что существуют обратные матрицы F_k^{-1}, т.е. $\det F_k \neq 0$.

Предполагается, что с помощью измерительных устройств измеряются некоторые величины системы (1) и результат измерения (т.е. выход) имеет вид

$$y^{(k)}(t) = G_k(t)x^{(k)}(t) + D_k(t)u^{(k)}. \tag{3}$$

Здесь $y^{(k)}(t)$ – известная s_k –мерная вектор-функция выходных переменных системы (измерения или показания прибора наблюдения); $G_k(t)$, $D_k(t)$ $(k = 1,...,m)$ матрицы размерностей $(s_k \times n_k)$ и $(s_k \times r_k)$, соответственно, с вещественными непрерывными элементами.

Определены понятия вполне управляемости составной системы (1), (2) на отрезке времени $[t_0, T]$ и вполне наблюдаемости системы (1), (2) по данным измерения (3) [6, 10, 11].

Рассматриваемые задачи заключаются в том, чтобы найти условия, при которых система (1), (2), будет вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$ и найти условия, при которых составная система (1), (2) по данным измерения (3) будет вполне наблюдаемой.

2. Об основных результатах

Сформулированны необходимые и достаточные условия вполне управляемости линейной нестационарной составной системы (1), (2) и условия вполне наблюдаемости системы (1), (2) по данным измерения (3).

В частности, учитывая что задача наблюдения составной системы (1), (2) состоит в том, чтобы по полученным результатам наблюдения (измерения) (3) определить значения вектор-функции $x^{(k)}(t)$ при всех $t \in [t_0, T]$, являющейся решением системы (1), (2) при известной $u^{(k)}(t)$ $(k = 1,...,m)$, показано, что для получения условия вполне наблюдаемости вместо уравнений (1) и (3) достаточно рассматривать однородные уравнения ($u^{(k)}(t) \equiv 0$)

$$\dot{x}^{(k)} = A_k(t)x^{(k)}, \tag{4}$$

$$y^{(k)}(t) = G_k(t)x^{(k)}(t). \tag{5}$$

Для того, чтобы восстановить функцию $x^{(k+1)}(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1}]$ $(k = 1,...,m-1)$, достаточно по данным измерения $y^{(k)}(t)$, определить начальное состояние $x^{(1)}(t_0)$ системы (4). Для определение $x^{(1)}(t_0)$ получено следующее уравнение [6, 10]

$$M(t_0, t_1, ..., T)x^{(1)}(t_0) = Z(t_0, t_1, ..., T), \tag{6}$$

где приняты обозначения

$$Z(t_0, t_1, ..., T) = \int_{t_0}^{T} \sum_{k=1}^{m} \psi_k^T(t) G_k^T(t) Y^{(k)}(t) dt, \qquad M(t_0, t_1, ..., T) = \int_{t_0}^{T} \sum_{k=1}^{m} \psi_k^T(t) G_k^T(t) G_k(t) \psi_k(t) dt,$$

$$Y^{(k)}(t) = y^{(k)}(t) - G_k(t) X_k[t, t_{k-1}] F_{k-1}^{-1} \left[\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i-1} W_i^{(k-1)} \beta_i \right],$$

$$\psi_k(t) = X_k[t, t_{k-1}] F_{k-1}^{-1} \left[(-1)^{k-1} W_1^{(k-1)} E_1 X_1[t_1, t_0] \right],$$

$$W_i^{(k)} = \prod_{j=1}^{k-i} E_{k+1-j} X_{k+1-j}[t_{k+1-j}, t_{k-j}] F_{k-j}^{-1} \quad (k = 2, 3, ..., m;\ i = 1, 2, ..., k-1).$$

Матрица $M(t_0, t_1, ..., T)$ имеет размерность $(n_1 \times n_1)$, а размерность вектор-столбца $Z(t_0, t_1, ..., T)$ равна $(n_1 \times 1)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для того, чтобы составная линейная система (4) с промежуточными условиями связи (2) и с наблюдаемой вектором (5) была вполне наблюдаемой на отрезке времени $[t_0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы матрица $M(t_0, t_1, ..., T)$ была неособой матрицей.

Полученные условия вполне управляемости и вполне наблюдаемости линейной нестационарной составной системы дают ответ также на вопросы вполне управляемости и вполне наблюдаемости стационарной системы. Однако практическое применение указанных условий связано с необходимостью построения фундаментальных матриц решения рассматриваемых систем, что неудобно. Поэтому целесообразно иметь условия, позволяющие судить о вполне управляемости или вполне наблюдаемости по элементам матриц, присуствующих в исходных данных исследуемых системах.

Получены необходимые и достаточные условия вполне управляемости и наблюдаемости составной линейной стационарной системы, выраженные непосредственно через исходные параметры системы.

Рассмотрены также многоэтапные управляемые и наблюдаемые процессы, когда размерности фазового вектора, векторов управления и наблюдения не меняются.

Для поэтапно меняющейся стационарной системы

$$\dot{x} = A_k x + B_k u \qquad t \in [t_{k-1}, t_k) \qquad (k = 1, ..., m) \tag{7}$$

с промежуточными условиями в моменты времени t_k, $x(t_k - 0) = x(t_k + 0) = x(t_k)$ $(k = 1, ..., m-1)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Поэтапно меняющаяся линейная стационарная система (7) вполне управляема на отрезке времени $t_0 \le t \le T$, тогда и только тогда, когда матрица

$$K = \{C_1(B_1, A_1B_1, \dots, A_1^{p_1-1}B_1), \dots, C_m(B_m, A_mB_m, \dots, A_m^{p_m-1}B_m)\} \tag{8}$$

имеет ранг равный n , где

$$C_j = V(T, t_j)e^{A_j t_j}, \quad j = 1, \dots, m; \qquad V(T, t_j) = \prod_{i=0}^{m-j-1} X_{m-i}[t_{m-i}, t_{m-i-1}], \quad j = 0, ..., m-1, \tag{9}$$

а числа p_j - обусловлены кратностями собственных значений матрицы A_j $(j = 1, \dots, m)$, $X_k[t, \tau]$- нормированная фундаментальная матрица решения однородной части k -ого уравнения (7).

Размерность матрицы K равна $(n \times q)$, где $q = r\sum_{k=1}^{m} p_k$.

Для однородного (т.е. при $u(t) \equiv 0$) уравнения

$$\dot{x} = A_k x, \qquad t \in [t_{k-1}, t_k), \quad (k = 1, ..., m) \tag{10}$$

с наблюдаемой величиной

$$y = G_k x, \qquad t \in [t_{k-1}, t_k), \quad (k = 1, ..., m) \tag{11}$$

споведлива следующая теорема.

Теорема 3. Для того чтобы поэтапно меняющаяся линейная стационарная система (10) с наблюдаемой величиной (11) была вполне наблюдаемой на отрезке времени $[t_0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$S = \{C_1^T G_1^T,\ C_1^T A_1^T G_1^T, ..., C_1^T (A_1^T)^{p_1-1} G_1^T, ..., C_m^T G_m^T,\ C_m^T A_m^T G_m^T,\ ..., C_m^T (A_m^T)^{p_m-1} G_m^T\} \tag{12}$$

был равен n , где

$$C_k = e^{-A_k t_{k-1}} V_{k-1}(t_{k-1}, t_0), \qquad V_k(t_k, t_0) = \prod_{i=0}^{k-1} X_{k-i}[t_{k-i}, t_{k-i-1}], \quad (k = 1, ..., m) \tag{13}$$

а числа p_k - обусловлены кратностями собственных значений матрицы A_k $(k = 1, ..., m)$.

Размерность матрицы S равна $(n \times q)$, где $q = s\sum_{k=1}^{m} p_k$.

Матрицы (8) и (12) являются матрицами управляемости и наблюдаемости соответствующих систем.

Если учитывать, что постоянные матрицы (9) и (13) с размерностями $(n \times n)$ имеют максимальный ранг, так как являются произведением фундаментальных матриц решения системы (7), то ранги матрицы управляемости и наблюдаемости равны ранг матриц без произведения на матрицу C_k ($k = 1, 2, \dots, m$), соответственно. Кроме того, если все собственные значения матрицы A_k $(k = 1, ..., m)$ являются простыми, то матрицы (8) и (12) имеют следующие виды

$$K = \{B_1, A_1B_1, (A_1)^2 B_1, \dots, A_1^{n-1}B_1, \dots, B_m, A_mB_m, (A_m)^2 B_m, \dots, A_m^{n-1}B_m\},$$

$$S = \{G_1^T,\ A_1^T G_1^T,\ (A_1^T)^2 G_1^T, ..., (A_1^T)^{n-1} G_1^T, ..., G_m^T,\ A_m^T G_m^T,\ (A_m^T)^2 G_m^T, ..., (A_m^T)^{n-1} G_m^T\}.$$

Показано, что на отдельных интервалах времени все подсистемы, которые образуют многоэтапный процесс, по отдельности могут быть не вполне управляемыми (наблюдаемыми), однако в целом на всем интервале времени многоэтапный процесс может быть вполне управляемой (наблюдаемой). А если хотя бы одна подсистема многоэтапного процесса на своем интервале времени функционирования вполне управляема (наблюдаема), то многоэтапный процесс также будет вполне управляемой (наблюдаемой). Тем самым выявлено, что вследствие использования полезных свойств каждой из подсистем можно получить новые свойства (вполне управляемость, вполне наблюдаемость) многоэтапного процесса, которые не присущи ни одной из этих подсистем.

Сравнения с условиями вполне управляемости и наблюдаемости Калмана [1-4] видно, что полученные условия являются обобщением известных условий.

Наряду с поэтапно меняющейся линейной стационарной системы (7) с наблюдаемой величиной

$$y = G_k x + D_k u, \qquad t \in [t_{k-1}, t_k), \qquad (k = 1, ..., m), \tag{14}$$

рассмотрен сопряженная система

$$\dot{z} = A_k^T z + G_k^T v, \qquad t \in [t_{k-1}, t_k) \qquad (k = 1, ..., m) \tag{15}$$

$$\xi = B_k^T z + D_k^T v, \qquad t \in [t_{k-1}, t_k) \qquad (k = 1, ..., m) \tag{16}$$

где A_k, B_k, G_k, D_k - постоянные матрицы размерностей $(n \times n)$, $(n \times r)$, $(s \times n)$ и $(s \times r)$, соответственно. Здесь векторы z, v, ξ имеют размерности n, s, r соответственно. Пусть все собственные значения матриц A_k простые.

Для поэтапно меняющейся линейной стационарной системы (7), (14) и сопряженной системы (15), (16) показан аналог принципа двойственности Калмана.

Принцип двойственности. Для того, чтобы система (7), (14) была вполне управлямой (вполне наблюдаемой), необходимо и достаточно, чтобы система (15), (16) была вполне наблюдаема (вполне управляема).

Критерии вполне управляемости и вполне наблюдаемости иллюстрированы на примерах конкретных поэтапно меняющихся систем, составляя матрицы управляемости и наблюдаемости.

Показано, что преобразованная составная система, полученная невырожденным линейным преобразованием, и исходная составная система эквивалентны. Показано также, что невырожденное преобразование не влияет на свойство вполне управляемости и наблюдаемости составной линейной стационарной системы.

Отметим, что при проектировании многоэтапных динамических процессов с помощью невырожденного преобразования, сохраняющего свойство управляемости (наблюдаемости), удобно будет выбрать определенный базис в пространстве состояний с тем, чтобы матрицы параметров системы имели хорошую (удобную при вычислении и при моделировании системы) форму.

Заключение

Полученные необходимые и достаточные условия вполне управляемости и вполне наблюдаемости многоэтапных линейных динамических процессов имеют важные теоретическое и прикладное значения. Эти условия выражены непосредственно через исходные параметры системы и могут иметь широкое практическое применение. Выявлено, что вследствие использования полезных свойств каждой из подсистем можно получить свойства вполне управляемость или вполне наблюдаемость многоэтапного процесса, которым возможно не обладает ни одна из этих подсистем. Показано, что при проектировании многоэтапных динамических процессов с помощью невырожденного преобразования, сохраняющего свойство управляемости или наблюдаемости, можно выбрать определенный базис в пространстве состояний с тем, чтобы в этом базисе матрицы параметров системы имели удобную для вычисления и моделирования форму.

Литература

1. Калман Р. Об общей теории систем управления. Труды I Конгреса ИФАК, т. 2. Изд-во АН СССР, Москва, 1961, с. 521-547.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968, 476 с.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 576 с.
4. Ройтенберг. Я. Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978, 552 с.
5. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск. Наука. 1987. 226 с.
6. Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука. 2016. 230 с.
7. Barseghyan V.R. "On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure, "*2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference)*, Moscow, Russia, 2016, pp. 33-35. http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=7541163&isnumber=7541147
8. Барсегян В.Р., Барсегян Т.В. Об управляемости многоэтапных динамических процессов с подвижными концами. «Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM-2016)». ИПУ РАН, Москва, 17-19 октября 2016. Труды XVI-ой международной молодёжной конференции. Под ред. А.В. Толока. М.: «Аналитик». –2016, с. 271-275. **http://lab18.ipu.ru**
9. Barseghyan V.R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems. Yugoslav Journal of Operations Resarch. 2012, Vol. 22, № 1, pp. 31-39.
10. Барсегян В.Р. Об условиях наблюдаемости поэтапно меняющихся управляемых линейных систем. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 5, с. 1050-1055.
11. Барсегян В.Р., Барсегян Т.В. Критерий управляемости линейных стационарных систем переменной структуры. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды VIII международной конференции. Сентябрь 22-26, 2014, Горис-Степанакерт, с. 83-87.
12. Барсегян Т.В. Об условии вполне управляемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы. Известия НАН РА. Механика, 2015, № 1, с.81-90.
13. Болтянский В.Г. Задача оптимизации со сменой фазового пространства. Дифф. уравнения. 1983, т. 19, № 3, с. 518-521.
14. Максимова И.С., Розова В.Н. Достаточные условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства. Вестник ТГУ, т. 16, вып. 3, 2011, с. 742-747.

15. Лазарева Е.В., Старожилов Е.Ф. Критерий управляемости для линейных непрерывно-дискретных систем управления с постоянными коэффициентами. Вестник СевГТУ: Сб. науч. тр. Вып. 36. Автоматизация процессов и управление. Севастополь: Изд-во «СевГТУ», 2002, с. 176-180.
16. Забелло Л.Е. Об управляемости линейных нестационарных систем, Автоматика и телемеханика, 1973, № 8, с. 13–19.
17. Johansson M. Piecewise Linear Control Systems. Spriger, 2003, X, 220 p.
18. Hong Shi and Guangming Xie. Controllability and Observability Criteria for Linear Piecewise Constant Impulsive Systems. Journal of Applied Mathematics. Volume 2012 (2012), Article ID 182040, 24 pages. http://dx.doi.org/10.1155/2012/182040
19. Dengguo Xu. Controllability and Observability of a Class of Piecewise Linear Impulsive Control Systems. Advances in Computer, Communication, Control and Automation. LNEE Vol. 121, 2012, pp. 321-328.
20. Xie G., Wang L. Necessary and sufficient conditions for controllability and observability of switched impulsive control systems. IEEE Trans. Autom. Control. 2004. 49, pp. 960-966.
21. Sun A., Ge S.S., and Lee T.H. Controllability and reachability criteria for switched linear systems. Automatica, 2002, 38, pp. 775–786.