

# Гиперсетевая модель изделия и структурный анализ конструкции

А.Н. Божко,  
доц., к.т.н., доц., abozhko@inbox.ru,  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва

В работе предлагается гиперсетевая модель изделия. Эта модель корректно описывает механические связи и отношение базирования переменной местности. Основную информацию о координации деталей в изделии дает вторичная сеть гиперсети, которая является гиперграфом. Предложено математическое описание последовательности сборки изделия. Даны необходимые и достаточные условия стягиваемости вторичной сети. Показано, что вторичную сеть можно использовать для глубокого структурного анализа конструкции. Описаны приемы структурного анализа, которые позволяют идентифицировать проектные ошибки и повысить качество проекта.

The paper proposes a hypernet model of the product. This model correctly describes the mechanical relationships and the relation of basing as poliadic relation. Basic information about the coordination of details in the product is provided by the secondary hypernet network, which is a hypergraph. A mathematical description of the assembly sequence is proposed. Necessary and sufficient conditions for the contraction of the secondary network are given. It is shown that the secondary network can be used for deep structural analysis of the design. Structural analysis techniques that identify project errors and improve the quality of the project are described.

## 1. Гиперсетевая модель изделия

Поведение технической системы в процессе сборки и разборки, разбиения на сборочные единицы закладывается на этапе проектирования и, в значительной степени, зависит от механической структуры изделия. Под механической структурой понимается множество деталей и соединений, которые обеспечивают геометрическую определенность и функциональную целостность конструкции.

В современных исследованиях по автоматизированному проектированию основной структурной моделью является граф связей  $G = (X, R)$  (граф сопряжений, liaison diagram, liaison graph, part connectivity graph, connection graph и др.) [1,2,4]. В графе  $G = (X, R)$   $X$  – множество вершин представляет детали изделия, а множество ребер  $R$  соединения и сопряжения между деталями. В процессе сборки изделия и его сборочных единиц детали координируются при помощи конструкторских баз. В общем случае, базирование детали достигается при помощи несколько механических связей. По этой причине отношение базирования является многоместным и не может быть корректно описано в терминах графа связей.

В работе предлагается гиперсетевая модель структуры изделия. Введем все необходимые обозначения и определения [3].

Гиперсетью называется кортеж  $HS = (X, V, R, P, F, W)$ , где

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$  – множество вершин;

$V = \{v_1, \dots, v_q\}$  – множество ветвей;

$R = \{r_1, \dots, r_m\}$  – множество ребер;

Оботображение  $P: V \rightarrow 2^X$  каждой ветви ставит в соответствие совокупность инцидентных вершин  $P(v) \subseteq X$ , тем самым отображение  $P$  задает гиперграф  $PS = (X, V, P)$ ;

Оботображение  $F: R \rightarrow 2_{PS}^V$  каждому ребру  $r \in R$  сопоставляет множество ветвей, причем семейство подмножеств  $2_{PS}^V$  содержит только связные фрагменты гиперграфа  $PS$ . Оботображение  $F$  определяет на множестве ветвей  $V$  гиперграф  $FS = (V, R, F)$ ;

Оботображение  $W: R \rightarrow 2^{P(F(r))}$  каждому ребру  $r \in R$  ставит в соответствие подмножество его вершин  $W(r) \subseteq P(F(r)) \subseteq X$ , где  $P(F(r))$  – множество вершин в  $PS$ , инцидентных ветвям  $F(r) \subseteq V$ . Оботображение  $W$  определяет гиперграф  $WS = (X, R, W)$ .

Гиперграф  $PS = (X, V, P)$  называется первичной сетью гиперсети  $HS$ , а гиперграф  $WS = (X, R, W)$  – вторичной сетью. Гиперграф  $FS = (V, R, F)$  служит для связи первичной и вторичной сетей.

Сборочную структуру технической системы опишем при помощи гиперсети  $HS = (X, V, R, P, F, W)$ , в которой:

- вершины  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  представляют детали;
- ветви  $V = \{v_1, \dots, v_q\}$  описывают соединения и сопряжения, которые используются для базирования деталей в составе изделий;
- ребра  $R = \{r_1, \dots, r_m\}$  представляют полные комплекты конструкторских баз;
- оботображение  $P: V \rightarrow 2^X$  каждой ветви ставит в соответствие пару деталей, между которыми существует связь в изделии  $X$ . Очевидно, что  $\forall v \in V |P(v)| = 2$  и первичная сеть  $PS = (X, V, P)$  является графом;
- оботображение  $F: R \rightarrow 2_{PS}^V$  каждому ребру  $r$  ставит в соответствие множество связей  $F(r) \subseteq V$ , которое обеспечивает координацию комплекта  $r$ . Это оботображение описывает базы как совокупности механических связей;
- оботображение  $W: R \rightarrow 2^{P(F(r))}$  каждому ребру  $r$  сопоставляет множество вершин  $P(F(r)) \subseteq X$ . Данное оботображение описывает базы как минимальные группировки деталей, обладающие внутренней координацией [5,6,7].

Первичная сеть  $PS = (X, V, P)$  гиперсети  $HS$  моделирует структуру механических связей, которые используются для базирования деталей. Вторичная сеть  $WS = (X, R, W)$  формализует геометрическую координацию деталей, которая достигается посредством механических связей (соединений и сопряжений). Отображение  $W$  каждому ребру ставит в соответствие минимальное по составу подмножество деталей, которые обладают свойством внутренней координации. Такие подмножества могут иметь различную мощность, поэтому  $|W(r)| > 1$ , и, в общем случае, вторичная сеть является гиперграфом.

На рис. 1 изображена простая конструкция, а на рис. 2 – гиперсеть  $HS_d$ , описывающая структуру данной конструкции. Ребра первичной сети  $PS_d$  изображены сплошными линиями, гиперребра вторичной сети  $WS_d$  показаны пунктиром.

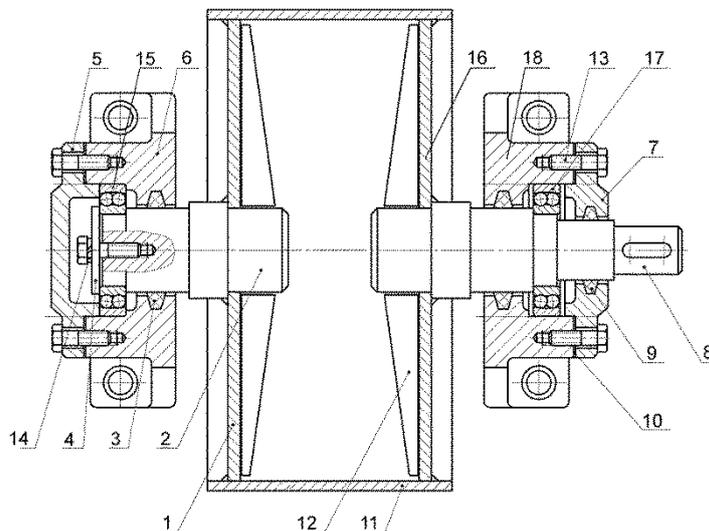


рис. 1 Конструкция барабана

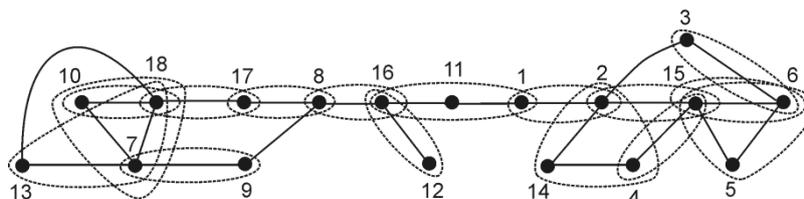


рис. 2 Гиперсеть  $HS_d$  конструкции барабана

## 2. Математическое описание процесса сборки

В процессе сборки реализуются механические связи и базы изделия. Отдельную сборочную операцию можно описать как стягивание ребра гиперграфа  $WS$ , а план сборки – в виде последовательности стягиваний ребер.

Приведем точное определение [5]. Последовательность сборки изделия  $X$  опишем вектором  $P = (WS_1, WS_2, \dots, WS_N)$ , в котором:

1.  $WS_1 = WS = (X, R, W)$  (стартовое состояние сборочного процесса);
2.  $WS_N$  представляет собой одновершинный гиперграф без петель и изолированных ребер (результат сборочного процесса, когда реализованы все связи изделия);
3. Стягиваются только ребра степени 2 (используются только секвенциальные и когерентные сборочные операции);
4. Для всех  $WS_i = (X_i, R_i, W_i)$  и  $WS_{i+1} = (X_{i+1}, R_{i+1}, W_{i+1})$ , выполняется равенство  $|R_i| = |R_{i+1}| + 1$  (каждая сборочная операция выполняется без перебазирования).

**Определение 1.** Операция отождествления двух вершин, связанных ребром второй степени, называется нормальным стягиванием.

Нормальное стягивание – это математическое описание когерентной секвенциальной операции сборки. Секвенциальность означает, что для реализации такой операции требуется два исполнительных органа. Приспособление, которое используется для базирования, или сборочный стенд считаются исполнительными органами. Когерентность означает, что в результате сборочной операции реализуется механическая связь.

На рис. 3 показан пример последовательности нормальных стягиваний гиперграфа  $WS_d$ , который описывает фрагмент конструкции (рис. 1), состоящий из деталей 1 – 6, 14, 15.

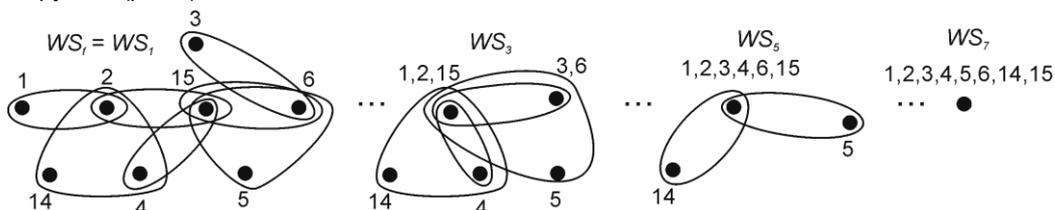


рис. 3 Последовательность стягиваний гиперграфа  $WS_d$

**Определение 2.** Гиперграф, для которого существует последовательность нормальных стягиваний, переводящая его в одновершинный гиперграф без петель и изолированных ребер, назовем *s*-гиперграфом.

*S*-гиперграфы служат математическими моделями структур изделий, которые можно собрать при помощи последовательности секвенциальных и когерентных сборочных операций. В [6] доказана следующая важная теорема о необходимых условиях стягиваемости.

**Теорема.** Если гиперграф  $WS = (X, R, W)$  стягивается, то:

1. Среди ребер  $WS$  существует по крайней мере одно ребро степени 2.
2. Гиперграф является связным.
3. Число вершин  $|X|$  и число ребер  $|R|$  гиперграфа  $WS$  удовлетворяют соотношению  $|X| = |R| + 1$  (линейное соотношение).

Теорема хорошо согласуется с интуицией человека и ее справедливость можно обосновать в содержательных терминах. Предположим, что изделие собирается без предварительного разбиения на сборочные единицы. Первая деталь базируется в сборочное приспособление или устанавливается на стенд, то есть она не нуждается во внутренних конструкторских базах. Для установки каждой последующей детали требуется ровно один комплект конструкторских баз, то есть общее число этих комплектов на единицу меньше числа деталей. Комплекты баз в гиперграфовых терминах описываются ребрами, что служит убедительным обоснованием справедливости линейного соотношения.

В общем случае, приведенная теорема дает только необходимые, но не достаточные условия стягиваемости, что подтверждается примером, приведенным на рис. 4. Для исходного гиперграфа (рис. 4,а) выполняются все условия теоремы. Но любая последовательность нормальных стягиваний преобразует исходный гиперграф в двойной «треугольник» (рис. 4, б), стягивание которого не может быть продолжено.

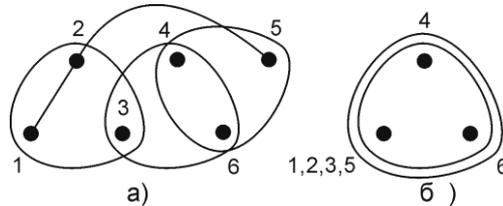


рис. 4. Пример нестягиваемого гиперграфа (а) и результат стягивания гиперграфа (б)

### 3. Структурный анализ конструкции

Гиперграф  $WS$  можно использовать для глубокого структурного анализа конструкции на ранних этапах проектирования. Он позволяет идентифицировать множество проектных ошибок и спрогнозировать поведение изделия на этапах сборки, разборки и разбиения на сборочные единицы. Рассмотрим несколько важных применений данного носителя структурной информации.

Неравенство  $|X| > |R| + 1$  является признаком несобираемости изделия. Это значит, что не существует последовательности секвенциальных и когерентных операций, реализующей данную конструкцию. Данный структурный дефект может быть вызван двумя основными причинами.

1. Отсутствие достаточной геометрической координации между деталями, которая вызвана недоопределенностью механической структуры изделия. Простейший пример такого типа приведен на рис. 5, а.
2. Наличие несеквенциальной сборочной операции, как показано на рис. 5, б.

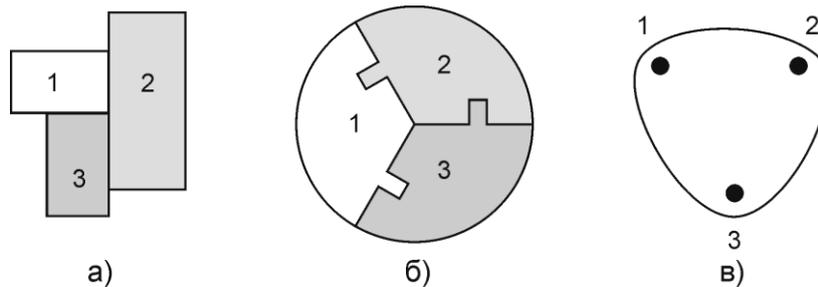


рис. 5 Несобираемые конструкции (а,б) и гиперграф, описывающий их структуру (в)

Неполная взаимная координация деталей – это конструкторская ошибка, которую можно устранить наложением дополнительных механических или размерных связей. Несеквенциальные сборочные операции, которые требуют для реализации трех и более исполнительных органов, являются нетехнологичными. Можно утверждать, что конструкторские решения, требующие несеквенциальной сборки, очень редко встречаются в современной инженерной практике и каждый такой случай требует особого внимания конструктора и технолога.

Если  $|X| \gg |R| + 1$ , то гиперграф становится настолько «разреженным», что может потерять даже свою формальную связность. Это диагностирует грубую конструкторскую ошибку.

Пусть для числа вершин  $|X|$  и число ребер  $|R|$  гиперграфа  $WS$  выполняется неравенство  $|X| < |R| + 1$ . Данное соотношение идентифицирует избыточность связей, механическую переопределенность. В технологической практике данное явление называется перебазированием. Это значит, что некоторая деталь (или детали) монтируется в изделие, при помощи координации по нескольким полным конструкторским базам. На рис. 6 изображена схема перебазирования.

На этом рисунке показано состояние, когда деталь  $z$  монтируется на собранный фрагмент изделия, представленный вершиной  $t$ , посредством стягивания двух ребер  $\{x,z\}$  и  $\{y,z\}$ . Согласно определению гиперграфа  $WS$ , его ребра описывают полные комплекты конструкторских баз деталей. В ситуации, показанной на рис. 6, а, деталь  $z$  базируется сразу по двум внешним координатным системам, которые образуют конструктивные элементы, принадлежащие  $x$  и  $y$ .

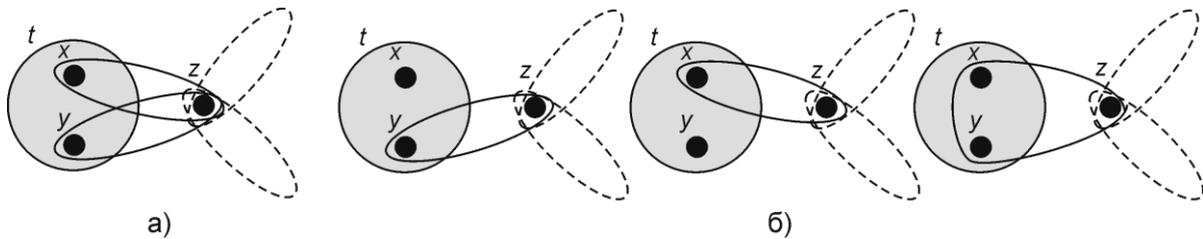


рис. 6 Схема перебазирования (а) и варианты корректной установки детали  $z$  (б)

Поскольку  $x$  и  $y$  принадлежат собранному фрагменту  $t$ , то положение их прообразов в изделии геометрически определено. Это создает ситуацию «избыточной скоординированности», так как для установки  $z$  требуется реализовать сверхдостаточное множество механических связей.

Перебазирование – это вредный феномен, оно влечет за собой нарушение технологического процесса, потерю точности и использование внештатных доводочных операций. Если детали изделия в процессе сборки ведут себя как абсолютно твердые тела, то перебазирование порождает неразрешимые размерные цепи.

Важно отметить, что современные системы автоматизированного проектирования и технологической подготовки сборочного производства не располагают средствами автоматического мониторинга и идентификации эффекта перебазирования. Эту задачу решают при помощи содержательного анализа связей деталей по трехмерной геометрической модели изделия.

Пусть для гиперграфа  $WS = (X, R, W)$  выполняется  $|X| < |R| + 1$ . Это значит, что в структуре изделия есть  $|R| - |X| + 1$  лишних связей, которые требуется идентифицировать и удалить без нарушения необходимых условий стягиваемости  $WS$ , заданных теоремой.

**Определение 3.** Операцию удаления избыточных ребер, в результате которой гиперграф  $WS$  удовлетворяет всем трем условиям теоремы, назовем линейризацией.

Линейризация избыточных гиперграфов позволяет получать механические структуры собираемых изделий, которые различно ведут себя в процессе сборки, разборки и разбиения на сборочные единицы. Для иллюстрации данного утверждения рассмотрим два простейших примера, которые обладают принципиально различными свойствами в процессе. Пусть имеются два  $n$ -вершинных графа: корневое дерево (рис. 7,а) и цепь (рис. 7,б). Если корень дерева соответствует базовой детали, то такая структура имеет  $(n-1)!$  различных последовательностей стягивания. Пусть в цепи базой является вершина с номером 1. Этот граф можно стянуть единственным способом.

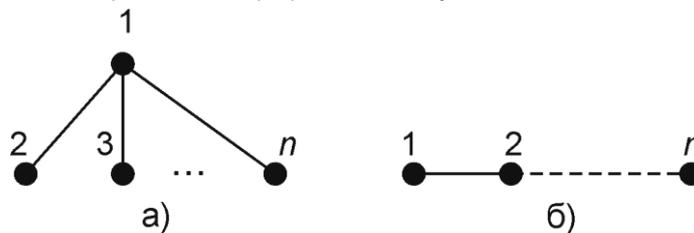


рис. 7 Простейшие  $s$ -гиперграфы: звезда и цепь

Данные структуры демонстрируют прямо противоположные свойства при разбиении на сборочные единицы. Легко видеть, что корневое дерево не имеет ни одного разбиения на независимо стягиваемые части. Цепь допускает множество таких разбиений. Для этого достаточно разделить ее на связные фрагменты, которые стягиваются независимо друг от друга. Корневое дерево обладает высокой собираемостью, цепь – высокой расчленяемостью.

В технологической практике на удаление связей при линейризации избыточных структур могут накладываться различные ограничения. Перечислим основные варианты ограничений:

1. Некоторое подмножество ребер объявляется защищенным от удаления.
2. На ребрах гиперграфа определена некоторая нечеткая функция или задано вероятностное распределение, описывающие предпочтительные варианты удаления.
3. Условия корректной редукции описываются логическим зависимостям. Например, удаление ребра  $x$  требует обязательного исключения ребра  $y$ , или ребра  $x$  и  $y$  не могут быть удалены одновременно.

Гиперграф  $WS$  можно использовать для оценки структурной технологичности. В качестве простого примера нетехнологичных структурных решений можно привести гиперребра высокой степени. Если в гиперграфе  $WS = (X, R, W)$  есть ребро  $r \in R$ ,  $|W(r)| \geq 3$ , то данный конструктивный фрагмент нуждается в проверке. При сборке таких фрагментов должна быть достигнута взаимная геометрическая координация трех и более деталей, что может быть сложной технологической задачей.

Еще один потенциально опасный фрагмент показан на рис. 8.

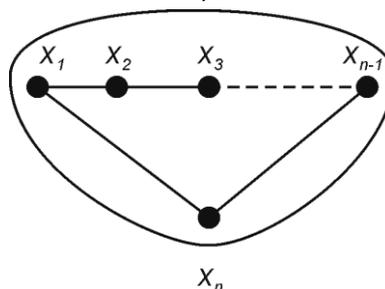


рис. 8 Пример структурной нетехнологичности

В этом примере деталь  $x_n$  базируется на скоординированный фрагмент, состоящий из деталей  $x_1$  и  $x_{n-1}$ . Взаимная координация последних достигается опосредованно, через цепочку попарно связанных деталей  $x_2, x_3, \dots, x_{n-2}$ . В этой цепочке происходит накопление погрешностей установки, что усложняет задачу точного позиционирования детали  $x_n$ .

### Литература

1. Ghandi S., Masehian El. Review and taxonomies of assembly and disassembly path planning problems and approaches // Computer-Aided Design. 2015. Vol. 67 – 68. Pp. 58 – 86. DOI:10.1016/j.cad.2015.05.001.
2. Bahubalendruni R., Biswal B. A review on assembly sequence generation and its automation // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2015. DOI:10.1177/0954406215584633.
3. Попков В.К. Математические модели связности. Новосибирск: Издательство ИВМиМГ СО РАН, 2006. 490 с.
4. Божко А.Н. Комбинаторные модели для сборки и декомпозиции изделий // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 10. DOI:10.7463/1015.0817524.
5. Божко А.Н. Моделирование механических связей изделия // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. №3. Режим доступа: <http://technomag.neicon.ru/doc/168373.html> (дата обращения 03.03.015).
6. Божко А.Н. Моделирование механических связей изделия. Условия стягиваемости // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. №5. Режим доступа: <http://technomag.neicon.ru/doc/182518.html> (дата обращения 05.06.2016).
7. Божко А.Н. Моделирование позиционных связей в механических системах [Текст] // Информационные технологии. 2012. №10. С. 27-33.