Статистическое моделирование оптимального обнаружения широкополосных сигналов на основе кодов М-последовательности при воздействии аддитивных и фазовых помех

Н.А. Романова,
студ., markovanatalya94@mail.ru,
НИЯУ МИФИ, г. Москва

Для вычисления одного из основных расчетных характеристик систем обнаружения широкополосных сигналов (ШПС) – вероятности правильного обнаружения, предложен метод расчета, основанный на статистическом моделировании воздействия аддитивных и фазовых помех на ШПС. Метод реализован за счет компьютерного моделирования самого сигнала и воздействующих на него помех, а также моделирования функционирования радиоэлектронной системы обнаружения. Разработка метода выполнена на примере ШПС, сформированного на основе кодов М-последовательности. Оценка вероятности правильного обнаружения проведена с помощью критерия оптимальности Неймана-Пирсона. Предложенный метод позволяет произвести выбор конкретного ШПС, при котором радиоэлектронная система обнаружения обеспечивает заданное значение вероятности правильного обнаружения

The report proposes a method for calculating the probability of correct detection. The probability of correct detection is one of the main characteristics of systems of detection of wideband signal (WBS). The calculation method is based on statistical modeling of the influence of additive and phase noise on the WBS. The method was implemented trough computer modeling of WBS, noise, and simulation of the functioning of electronic detection systems. The method is developed on the example of the WBS generated on the basis of codes of M-sequence. Assessment of the probability of correct detection was carried out according to the criterion of Neumann-Pearson. The proposed method allows to select a particular WBS, wherein the electronic detection system provides a specified probability of correct detection

1. Постановка задачи

Одной из основных расчетных характеристик систем оптимального обнаружения сигналов является вероятность правильного обнаружения. Обычно этот параметр определяется по критерию оптимальности Неймана-Пирсона для произвольного сигнала, находящегося под воздействием аддитивной помехи типа гауссова белого шума. Однако, при использовании широкополосных сигналов, как правило, чувствительных к фазовым помехам, становится актуальной задача уточнения значения вероятности правильного обнаружения за счет учета воздействия на сигнал не только аддитивных, но и фазовых помех.

Модель воздействия аддитивного гауссова белого шума на радиосигнал, как известно [1], является наиболее простой моделью влияния помехи. В рамках этой модели обнаружение сигнала на фоне помех заключается в формировании значения решающего функционала $\hat{A}[y(t)]$, при приеме системой обнаружения случайного сигнала $y(t) = x(t) + n(t)$, в котором *x(t)* - детерминированный сигнал, $n(t)$ - реализация случайного процесса помехи. При этом, значение $\hat{A}[y(t)] = 1$ означает обнаружение, а $\hat{A}[y(t)] = 0$ - необнаружение радиосигнала. Вводя случайные события: A_1 - наличие сигнала *x(t)* в принимаемом сигнале *y(t)*, A_0 - отсутствие сигнала *x(t)* в сигнале *y(t)*, можно определить условные вероятности: $D = P\left(\{\hat{A}[y(t)] = 1\} \mid A_1\right)$ - вероятность правильного обнаружения, $F = P\left(\{\hat{A}[y(t)] = 1\} \mid A_0\right)$ - вероятность ложного обнаружения (ложная тревога).

Эти вероятности вычисляются с помощью измерения максимального значения корреляционной функции *R(τ)* сигналов *x(t)* и *y(t)*, т.е. значения **Z**, определяемого соотношением

$$Z = R(\tau)\big|_{\tau=0} = \int_{Z_0}^{\infty} y(t+\tau)x(t)dt\Big|_{\tau=0} = \int_{Z_0}^{\infty} y(t)x(t)dt.$$

Значений *D* и *F* определяются выражениями

$$D = \int_{Z_0}^{\infty} p_{сп}(Z)dZ \tag{1}$$

$$F = \int_{Z_0}^{\infty} p_{п}(Z)dZ\,, \tag{2}$$

в которых гауссово распределение $p_{сп}(Z)$ для случайного значения *Z* при наличии сигнала *x(t)* в принимаемом сигнале *y(t)* определяется соотношением

$$p_{сп}(Z) = \frac{1}{\frac{N_0}{2}q\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(Z - \frac{N_0}{2}q^2\right)^2}{\frac{N_0^2}{2}q^2}\right), \tag{3}$$

а гауссово распределение $p_{п}(Z)$ случайного значения *Z* при отсутствии сигнала *x(t)* в принимаемом сигнале *y(t)* - соотношением

$$p_п(Z)=\frac{1}{\frac{N_0}{2}q\sqrt{2p}}\exp\left(-\frac{Z^2}{\frac{N_0{}^2}{2}q^2}\right), \qquad (4)$$

где N_0 - значение плотности мощности гауссова белого шума, $q^2=\frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt$ - параметр обнаружения (отношение сигнал/шум по мощности).

Величина порогового значения Z_0 определяется с помощью критерия оптимальности Неймана-Пирсона. В соответствии с этим критерием оптимальным обнаружителем считается такой, у которого решающий функционал $\hat{A}_{опт}\left[y(t)\right]$ обеспечивает максимальное значение вероятности **D**, при условии, что $F\le F_0$, где F_0 - предельно допустимое значение вероятности ложной тревоги. Выражение для $\hat{A}_{опт}\left[y(t)\right]$ имеет следующий вид [1]

$$\hat{A}_{опт}\left[y(t)\right]=\begin{cases}1,\ если\ Z>Z_0;\\0,\ если\ Z\le Z_0.\end{cases} \qquad (5)$$

Таким образом, вычисление вероятности **D** по критерию Неймана-Пирсона сводится к следующему.

1. Определение порогового значения Z_0 по заданному предельному значению F_0 с помощью соотношения (2).
2. Вычисление значения **D** с помощью соотношения (1).

Описанная методика вычисления значения **D**, как отмечалось ранее, обычно применяется в рамках модели, учитывающей лишь аддитивный гауссов белый шум. Однако, широко используемые в настоящее время ШПС, чувствительны также к флуктуациям фазы радиочастоты, т.е. к фазовым шумам.

Целью данной работы является разработка методики вычисления значения вероятности правильного обнаружения **D** для ШПС при одновременном воздействии на него аддитивных и фазовых шумов.

2. Методика статистических испытаний

Для решения поставленной задачи использован метод Монте-Карло, реализованный за счет компьютерного моделирования с помощью пакета прикладных программ MATLAB. Схема компьютерной модели измерительной установки показана на рисунке 1.

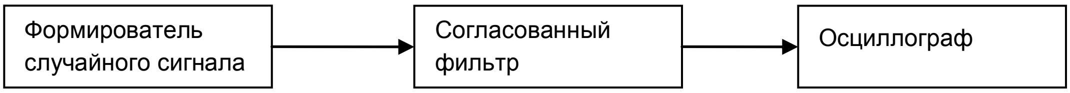


рис. 1 Схема компьютерной модели измерительной установки

В качестве детерминированного сигнала $x(t)$ выбран радиосигнал на основе кодов М-последовательности, определяемый соотношением $x(t)=A(t)cos(\omega_0 t)$, где $A(t)$ – шумоподобный видеосигнал, сформированный на основе кода М-последовательности. Длина М-последовательности выбрана равной $N = 15$. Следовательно, радиосигнал $x(t)$ будет содержать 15 дискретов, представляющих радиоимпульсы. Этому сигналу соответствует согласованный фильтр, измерительной установки. На выходе согласованного фильтра формируется корреляционная функция $R(\tau)$, максимум которой определяется с помощью осциллографа. Основой для построения формирователя случайного сигнала служит соотношение

$$y(t)=A(t)cos[\omega_0 t+\lambda n(t)]+n(t)=A(t)\{cos(\omega_0 t)cos[\lambda n(t)]-sin(\omega_0 t)sin[\lambda n(t)]\}+n(t).$$

Схема формирователя случайного сигнала показана на рисунке 2. С целью упрощения системы статистических испытаний принято в качестве допущения формирование обоих шумовых процессов от одного генератора шума. При этом мощности аддитивных и фазовых шумов связаны коэффициентом λ^2 .

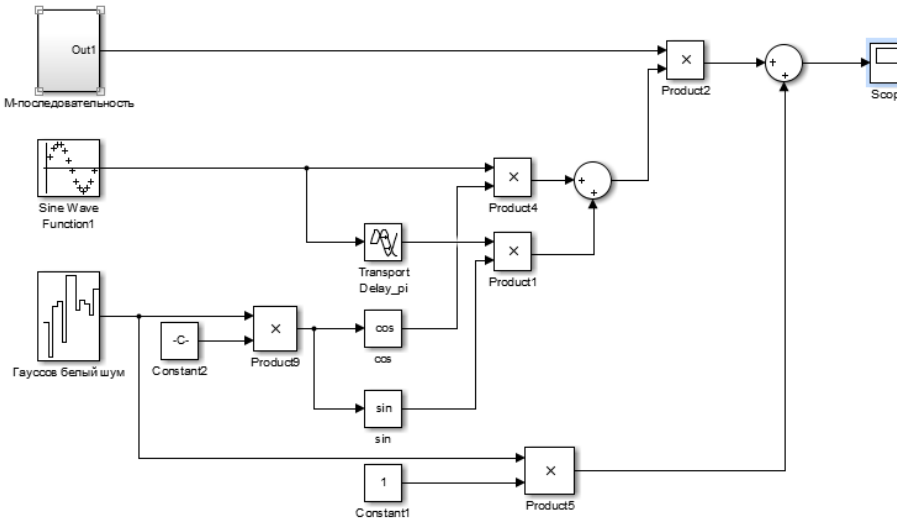


рис. 2 Схема формирователя случайного сигнала

3. Результаты статистических испытаний

В результате серии статистических испытаний, при различных значениях отношения $\lambda^2 = \frac{\sigma_ф^2}{\sigma_a^2}$, где $\sigma_ф^2$ - мощность фазового шума, а σ_a^2 - мощность аддитивного шума, получены гистограммы распределений значения максимума корреляционной функции Z. Обработка гистограмм позволила установить формульные выражения для законов распределения величины Z. Вид гистограмм и соответствующих распределений показан ниже (Рис.3 - Рис.8) Видно, что гистограмме при $\lambda = 0$ соответствует закон распределения Гаусса, который описывается формулой [2]:

$$p(Z)\Big|_{\lambda=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_Z}} e^{-\frac{(Z-M_Z)^2}{2D_Z}}, \tag{6}$$

где M_Z - выборочное среднее значение случайной величины Z, D_Z - выборочная дисперсия случайной величины Z.

Сравнивая соотношения (6) и (3) получим:

$$M_Z = \frac{N_0}{2} q^2; \qquad D_Z = \frac{N_0^2}{4} q^2.$$

Следовательно,

$$N_0 = 2\frac{D_Z}{M_Z}; \qquad q^2 = \frac{2}{N_0} M_Z = \frac{M_Z^2}{D_Z}.$$

Гистограммы, полученные при $\lambda \neq 0$ допускают следующую физическую интерпретацию. Максимальное значение корреляционной функции Z, измеряемое на выходе согласованного фильтра, представляет собой сумму вкладов каждого дискрета ШПС. Если каждое из этих слагаемых представить в виде комплексной амплитуды сигнала отдельного дискрета, то у этой амплитуды будут случайными модуль и фаза. Тогда на векторной диаграмме измеряемое значение Z будет модулем случайного вектора, являющегося векторной суммой случайных векторов отдельных дискретов. Как известно [3], в такой векторной системе при определенных условиях для модуля суммарного вектора справедлив закон распределения Райса. Если при этом, дополнительно выполняется условие равномерного распределения фаз компонент отдельных дискретов в диапазоне от 0 до 2π, то модуль суммарного вектора имеет распределение Релея. Условие равномерности распределения фаз выполняется для дискретов ШПС, если значение λ достигнет такой величины λ_0, что фазовая флуктуация $\lambda_0 n(t)$ перекрывает весь диапазон от 0 до 2π. Дальнейшее увеличение $\lambda > \lambda_0$ не меняет закон распределения значения Z, т.е. закон Релея при $\lambda > \lambda_0$ остается неизменным. На основании изложенного можно заключить следующее. Гистограммам при $\lambda^2 = 0.2\cdot10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-2}$ соответствует закон распределения Райса, который описывается формулой,

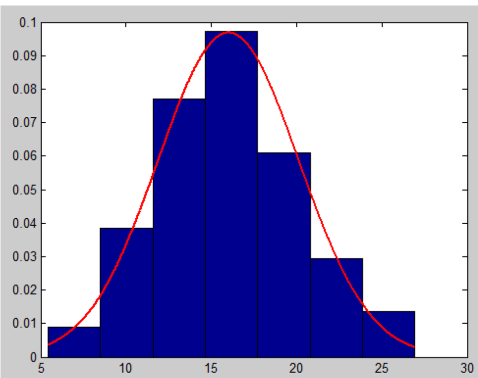
$$p(Z) = I_0\left(\frac{ZC}{\sqrt{D_Z}}\right)\frac{Z}{D_Z} e^{-\frac{(Z^2+C^2)}{2D_Z}} \tag{7}$$

где $I_0(x)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $C = \sqrt{\overline{Z^2} - 2D_Z}$ - некоторая постоянная, $\overline{Z^2}$ - статистически усредненное значение величины Z^2.

Гистограммам при $\lambda^2 = 0.09, 0.25$ соответствует закон распределения Релея, который описывается формулой.

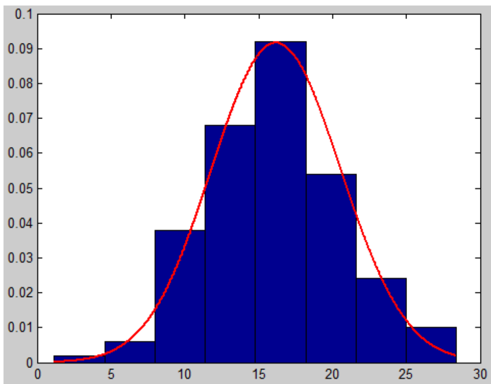
$$p(Z) = \frac{Z}{D_Z} e^{-\frac{Z^2}{2D_Z}} \tag{8}$$

Соотношение законов распределения изображено ниже (Рис.9). Изменение закона распределения максимума корреляционной функции в зависимости от отношения мощностей фазовых и аддитивных шумов показано ниже в таблице 1.



Z

рис. 3 Гистограмма распределения Гаусса при $\lambda^2 = 0$



Z

рис. 4 Гистограмма распределения Райса при $\lambda^2 = 0.2\cdot10^{-3}$

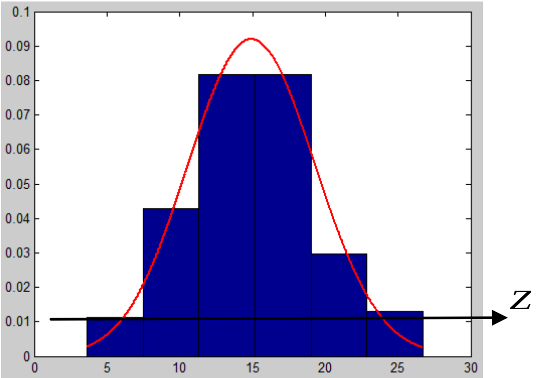


рис. 5 Гистограмма распределения Райса при $\lambda^2 = 10^{-3}$

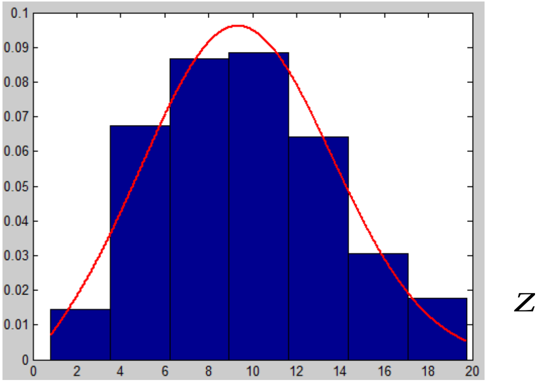


рис. 6 Гистограмма распределения Райса при $\lambda^2 = 10^{-2}$

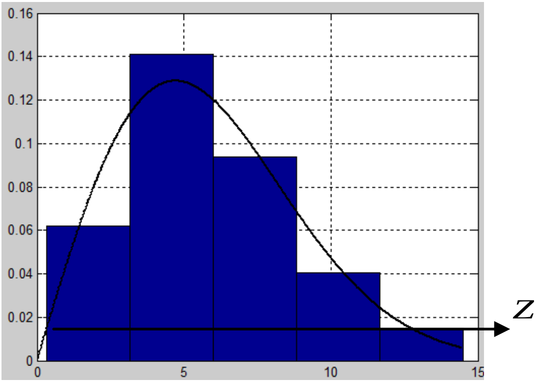


рис. 7 Гистограмма распределения Релея при $\lambda^2 = 0.09$

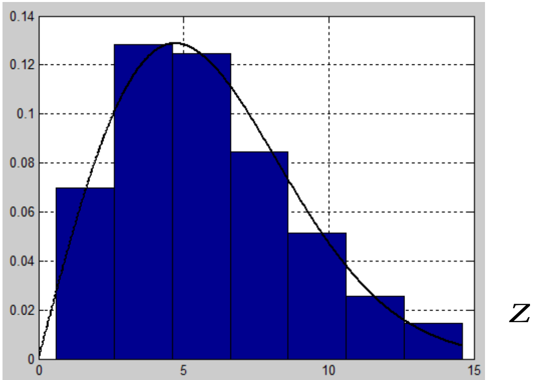


рис. 8 Гистограмма распределения Релея при $\lambda^2 = 0.25$

Таблица 1

Изменение закона распределения Z

λ^2 *при* q^2 *>>25*	**0**	**0,0002**	**0,001**	**0,01**	**0,09**	**0,25**
Закон распределения максимума корреляционной функции	Гаусса	Райса	Райса	Райса	Релея	Релея

4. Вероятность правильного обнаружения радиосигнала

На основе полученных законов распределения максимума корреляционной функции **Z** в рамках критерия оптимального обнаружения Неймана-Пирсона определены значения вероятности правильного обнаружения **D**. При этом, вычисление порогового значения z_0 произведено по формулам (2) и (6), а вычисление значений D при различных λ - по формуле (1), в которую в качестве $p_{сп}(Z)$ подставлены, соответственно, формулы (6), (7), (8). В результате получены зависимости вероятности правильного обнаружения радиосигнала **D** от амплитудного

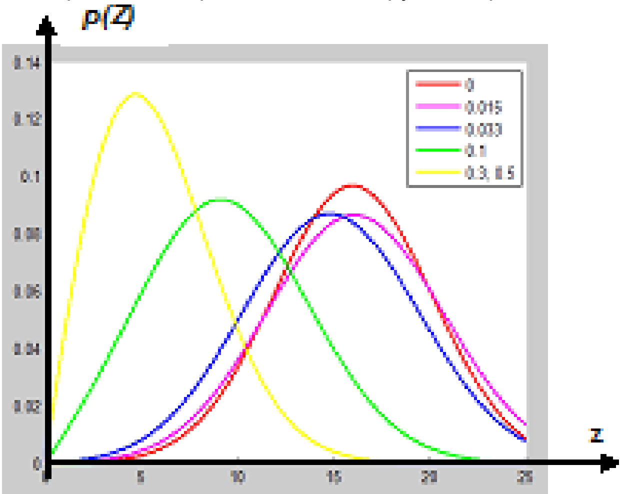


рис. 9 Законы распределения при $\lambda^2 = 0; 0.2 \bullet 10^{-3}; 10^{-3}; 0.01; \; 0.09; 0.25$

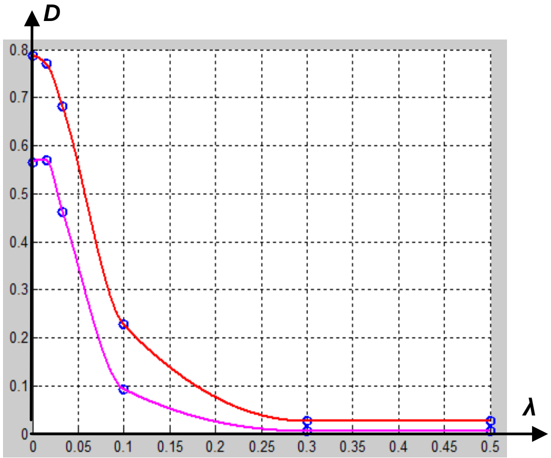


рис. 10 Зависимости **D(λ)** при $F_0 = 10^{-3}$ (верхняя), $F_0 = 10^{-4}$ (нижняя)

Выводы

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

- Одновременное воздействие фазовых и аддитивных шумов на радиосигнал на основе кодов М-последовательности приводит к изменению гауссова закона распределения максимума корреляционной функции, последовательно превращая его с ростом фазового шума вначале в закон Райса, а затем в закон Релея.
- При достаточно большей мощности фазового шума вид закона распределения стабилизируется, оставаясь неизменным законом Релея.
- Расчёт вероятности правильного обнаружения радиосигнала на основе кодов М-последовательности при воздействии только аддитивного шума дает завышенный результат. Учет воздействия фазового шума одновременно с аддитивным существенно уменьшает величину этой вероятности.

Заключение

В работе предложен метод расчета вероятности правильного обнаружения широкополосных сигналов, основанный на компьютерном моделировании функционирования радиоэлектронной системы обнаружения сигналов. Метод позволяет на этапе эскизного проектирования вновь разрабатываемой системы осуществить выбор широкополосного радиосигнала для получения требуемого значения вероятности. Применение метода не требует физического макетирования радиоэлектронных устройств, так как полностью реализуемо с помощью компьютерного моделирования.

Литература

1. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.
2. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 624с.
3. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. – М.: Наука, 1976. – 496 с.