

Применение диаграммы Вороного на основе функционально-воксельного моделирования в задачах поиска пути

М.А. Локтев
к.т.н., доц., m.loktev@stankin.ru
МГТУ «СТАНКИН», г. Москва

В работе рассматривается подход к построению диаграммы Вороного на основе функционально-воксельного моделирования (ФВМ). В качестве способа задания точек диаграммы используется теория R-функций. Предложенное решение основывается на выделении геометрической конструкции диаграммы на специальных графических образах. Помимо этого, рассматривается возможность применения такого метода в задачах планирования пути.

In this paper, an approach to constructing the Voronoi diagram on the basis of the functional-voxel modeling (FVM) is considered. The theory of R-functions (Rvachev functions) is used as a method for specifying points of a diagram. The proposed solution is based on the allocation of the geometric construction of the Voronoi diagram on special graphic images. In addition, the possibility of using such a method in path planning problems is considered.

Введение

Диаграмма Вороного является важным инструментом в решении ряда задач геометрии, геологии, картографии, кристаллографии и т.д. В различных областях математики и некоторых приложениях ей отводится фундаментальная роль [1]. В общем виде диаграмма Вороного является разбиением плоскости для конечного множества точек, при котором каждая область разбиения образует множество точек, более близких к одному из элементов множества S , чем к любому другому элементу множества. В работе [2] диаграмма Вороного определяется как совокупность так называемых многоугольников Вороного для заданного множества точек $\{P_1, \dots, P_N\}$ на плоскости. Каждый из многоугольников для точки $P_i \in \{P_1, \dots, P_N\}$ является геометрическим местом точек, которые находятся ближе к P_i , чем к любой другой точке из заданного множества $P_j \in \{P_1, \dots, P_N\}$, при $j \neq i$. Кроме того, применение диаграммы Вороного встречается и в построении скелета многоугольной фигуры [3]. Именно поэтому построение диаграммы Вороного с помощью функционально-воксельного моделирования является логическим продолжением ряда работ [4-5], посвященных построению прямолинейного скелета на основе ФВМ.

Существует множество алгоритмов построения диаграммы Вороного, имеющие разную вычислительную сложность. Одним из самых распространенных подходов являются метод заметающей прямой (*sweep line*) [6], который основывается на построении структуры диаграммы, во время движения сканирующей линии. Рассматриваемый в работе способ формирования диаграммы Вороного на основе функционально-воксельного моделирования, принципиально отличается от известных методов за счет применения так называемых графических M-образов. Сам по себе M-образ представляет собой модель, отражающую локальную геометрическую характеристику исследуемой поверхности как определенное геометрическое свойство.

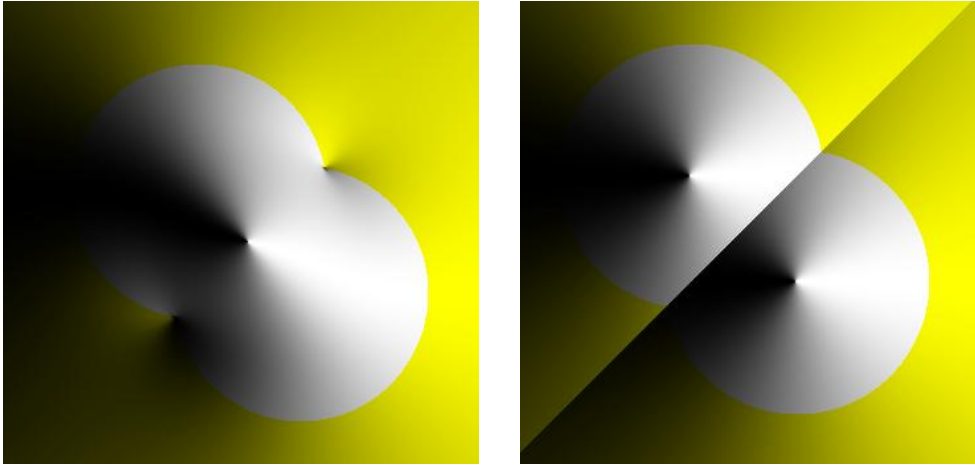
В работе [7] подробно описан принцип вычисления локальных геометрических характеристик рельефа. Для этого линейно аппроксимируется поверхность выбранной функции w_1 , где каждой точке пространства сцены соответствует уравнение плоскости $A_i x + B_i y + C_i w + D_i = 0$. Повысив размерность нормали к площадке на одно измерение, получим уравнение $A_i x + B_i y + C_i w + D_i t = 0$. В результате имеем четыре локальных геометрических характеристик, т.е. компоненты нормали (A_i, B_i, C_i, D_i) для каждой из точек функциональной области w_1 [8].

R-функциональное моделирование (RFM)

Для аналитического построения геометрических объектов в ФВМ используется математический аппарат R-функций (RFM). Фундаментальные основы этого направления были заложены В.Л Рвачевым в [9], в которых R-функции были выделены, как отдельный класс задач, посвященных геометрии пространства. Теория R-функций позволила решить обратную задачу аналитической геометрии: построение уравнения для заданного геометрического объекта [10]. Применение RFM позволяет без труда строить и комбинировать сложные функционально-воксельные геометрические модели. Самой первой и наиболее распространённой в геометрическом моделировании функционального пространства является система R-функций, состоящая из трех уравнений:

$$\begin{cases} \omega_1 \wedge_{\alpha} \omega_2 = \frac{1}{\alpha+1} (\omega_1 + \omega_2 + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\alpha\omega_1\omega_2}); \\ \omega_1 \vee_{\alpha} \omega_2 = \frac{1}{\alpha+1} (\omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\alpha\omega_1\omega_2}); \\ \omega_1 \equiv -\omega_1, \end{cases} \quad (1)$$

где f_1 и f_2 – функции, определяющие исходные геометрические объекты. В представленной системе R-функций (1) особое место занимает коэффициент $\alpha(f_1, f_2)$, принимающий значения $-1 < \alpha(f_1, f_2) \leq 1$ и влияющий на способ заполнения функционального пространства. При $\alpha=0$ система R-функций приобретает частный случай и поведение рельефа функции отвечает квадратичному закону. Например, на рисунке 1а представлен графический M-образ функционально-воксельного моделирования на основе объединения двух одинаковых окружностей с помощью уравнения (1) при $\alpha=0$.



а) при $\alpha=0$
 б) при $\alpha=1$
 рис.1. Графический M-образ R-функционального объединения двух окружностей

Полученный M-образ (рис. 1а) отражает поведение рельефа функции с единственным экстремумом в виде точки контрастного перехода цвета. Такая визуализация функционально-воксельного пространства определяет единственную не дифференцируемую точку, а рельеф M-образа не способен выделить границу предполагаемой диаграммы Вороного. Необходимо увеличить коэффициент α для изменения рельефа графического M-образа. Увеличение коэффициента приводит к появлению новых не дифференцируемых точек. Наибольший интерес представляет M-образ при $\alpha=1$ (рис.1б), рельеф которого формирует очевидные цветовые переходы в местах предполагаемой диаграммы. Система R-функций в таком случае приобретает другой частный случай:

$$\begin{cases} \omega_1 \wedge \omega_2 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + |\omega_1 - \omega_2|); \\ \omega_1 \vee \omega_2 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 - |\omega_1 - \omega_2|). \end{cases} \quad (2)$$

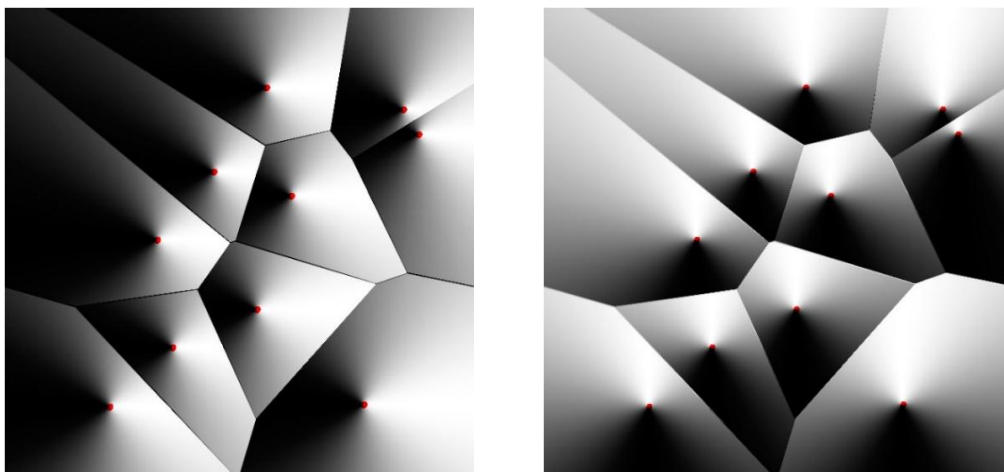
Заполнение функционального пространства на M-образе, полученном на основе R-операций системы (2), отвечает линейному закону (рис. 1б). Данный образ представляет наибольший интерес, поскольку граница R-функции является границей ячеек диаграммы Вороного.

Представление диаграммы Вороного на графическом M-образе

Построение диаграммы Вороного на основе концепции функционально-воксельного моделирования, подразумевает использования линейной системы R-функций (2) для создания порожденных M-образов увеличенной размерности функционального пространства. Множество заданных точек диаграммы Вороного будут аналитически описываться множеством окружностей с единичным (минимальным) радиусом.

$$\omega_i = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - r_i^2, \quad (3)$$

где $r_i \rightarrow 0$ минимальный допустимый радиус. При увеличении размерности пространства точки-окружности будут образовывать параболоиды. В результате соседние параболоиды формируют линии пересечения. При проецировании этих линий на плоскость заданных точек образуется диаграмма Вороного. Очевидно, для любого пикселя (вокселя) внутри многоугольника Вороного ближайшей точкой из заданного множества будет вершина своего параболоида. Диаграмма Вороного для 10 точек будет представлять собой теоретико-множественное пересечение 10 окружностей с единичным радиусом на основе линейной системы R-функций (2). В результате образуется пара ортогональных M-образов C_x и C_y (рис. 2а,б).



а) C_x
 б) C_y
 рис. 2. Диаграмма Вороного для 10 точек на основе M-образов

Компьютерное выделение ребер диаграммы основано на выявлении цветовых переходов на ребрах диаграммы. Для сопоставления цветовой закрашки соседних пикселей достаточно одного образа S_x . Однако, ребро может располагаться вдоль направления освещения образа, тем самым, затрудняя его распознавание. В этом случае, на ортогональном образе S_y это же ребро будет располагаться поперек направления освещения, и будет отчетливо выделяться при компьютерной обработке изображения. Таким образом, использование пары ортогональных M -образов позволяет значительно уточнить процесс распознавания границы диаграммы Вороного.

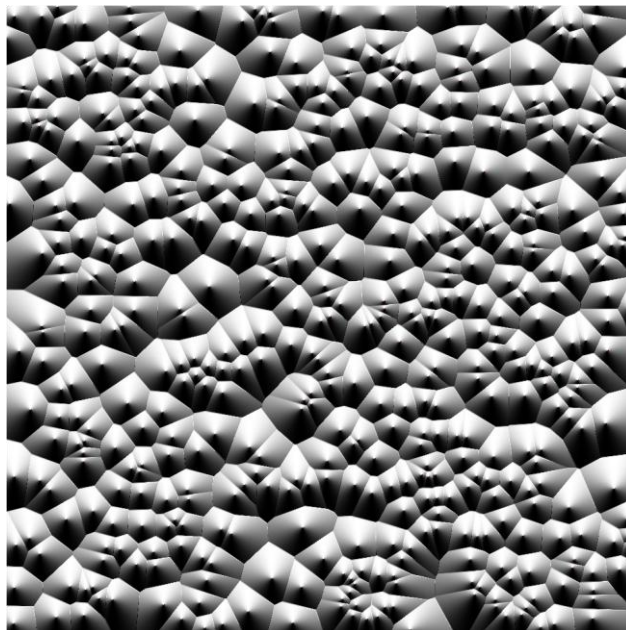


рис. 3. Графический M -образ для диаграммы Вороного из 500 точек

Количество точек заданного множества может быть ограничено только размерностью воксельного пространства, так для массива 1000×1000 без труда строится диаграмма Вороного для 500 точек.

Задача поиска пути на основе диаграммы Вороного

Диаграммы Вороного активно применяются в решении задач поиска пути [11], причем диаграммы строятся не только для точек, но и для целых объектов. В [12] приводится обзор различных методов ее использования при планировании траекторий. Авторами рассматривается метод дорожной карты [13] как один из геометрических подходов к построению траекторий. Данный метод представляет наибольший интерес поскольку легко адаптируем под диаграммы Вороного, полученные на основе M -образов ФВМ.

В основу метода положено формирование графа, в качестве узлов которого выбираются свободные ребра диаграммы, то есть не пересекающие препятствия. Решение задачи поиска пути при наличии начальных и конечных точек маршрута сводится к нахождению ближайшего ребра, а затем движению по ребрам диаграммы до сближения с конечной точкой (рис. 4). Поскольку каждая ячейка диаграммы несет в себе геометрическую информацию о своей форме, то можно усовершенствовать алгоритм, применяя принцип движения по градиенту. Градиентный спуск осуществляется до ближайшего ребра, тем самым частично сглаживая получившиеся трассу. Реализация такого гибридного алгоритма не является приоритетной задачей, поскольку все равно не имеет однозначного задания опорных точек.

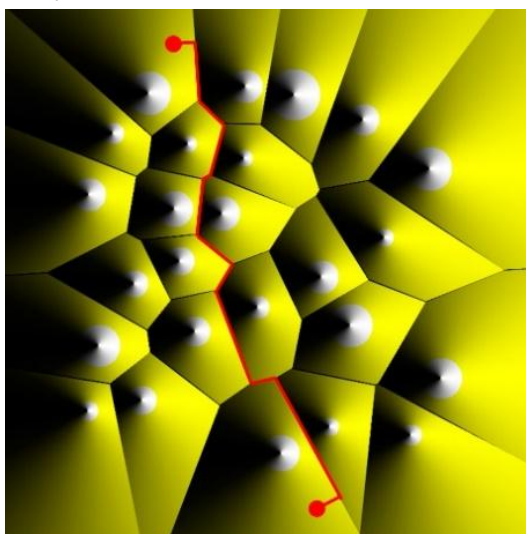


рис. 4. Построение маршрутов по диаграмме Вороного, полученной на основе M -образа

Сформированная по диаграмме Вороного (Рис. 4) дорожная карта в работе [12] относится к классу неполных, поскольку не имеет охватывающей рамки. В работе [13] рассматриваются различные методы задания охватывающих

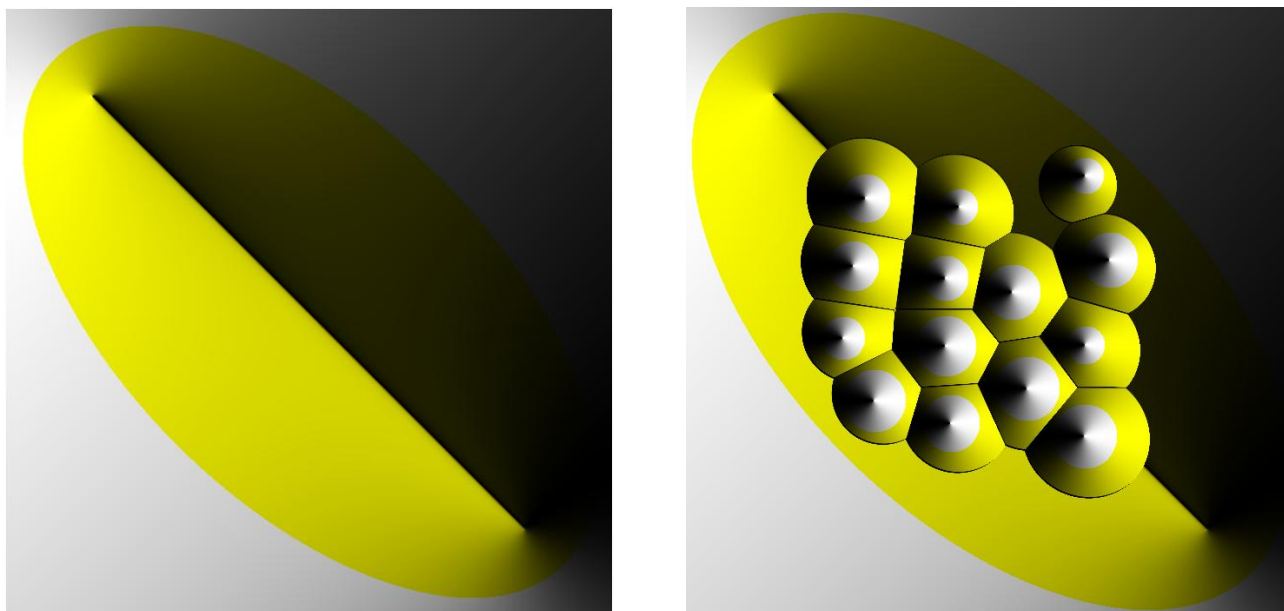
рамки для построения полных дорожных карт. Маршруты, построенные по рамке, повторяющей контур оказались намного эффективнее, чем ограничение среды прямоугольником.

Решением проблемы должно стать замыкание сцены ограничивающей рамкой, способной однозначно выделить рельеф поверхности функции между точками входа и выхода трассы. Таким объектом можно представить эллипс, описанный через координаты фокусных точек:

$$\omega_1 = \sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2} + \sqrt{(x-x_B)^2 + (y-y_B)^2} - 2a, \quad (4)$$

где, a – большая полуось эллипса. Графический M -образ на основе фокусного уравнения эллипса (рис. 5а), имеют явно выраженные хребты на рельефе поверхности функции, представленные в виде цветового контраста на уровне точек хребтов между фокусами.

Применим фокусное уравнение эллипса в качестве замыкающего контура сцены для построения маршрута из одной точки в другую. Полученная модель (рис. 5б) представляет собой результат объединения функций препятствий и эллипса (4), рельеф которой во многом повторяет диаграмму Вороного. Построение маршрутов возможно осуществить напрямую по рельефным элементам, без алгоритмов поиска ближайшего ребра. В отличие от рассматриваемого ранее случая построения маршрута по диаграмме Вороного (рис. 4), подобная геометрическая конструкция может быть представлена полной дорожной картой, что позволяет применять соответствующие алгоритмы [13]. При компьютерном вычислении не дифференцируемых ребер, помимо выделения цветового перехода, необходимо провести фильтрацию ребер, граничащих с препятствием. Очевидно, что полученные траектории могут не удовлетворять требованиям, предъявляемым к гладкости трассы. Несмотря на значительное удобство однозначного задания опорных точек маршрута, разработанный алгоритм требует дополнительных алгоритмов сглаживания для применения в прикладных задачах. Другим значительным недостатком является ограничение предлагаемых решений, то есть в случае динамического появления препятствия выбор нового направления движения является затруднительной задачей.



а) без препятствий

б) с препятствиями

рис. 5. Графические M -образы моделирование трассы на основе фокусного уравнения эллипса

Заключение

В работе был рассмотрен алгоритм формирования диаграммы Вороного на основе графических M -образов функционально-воксельного моделирования (ФВМ) Полученные в результате применения метода ФВМ модели не требуют дополнительных численных вычислений для не дифференцируемых точек. Компьютерное распознавание ребер осуществляется с помощью простейшего алгоритма поиска цветового контраста. Использование R -функционального объединения множества заданных точек, выраженных окружностями с единичным радиусом, формирует элементы модели, содержащую диаграмму Вороного. Распознавание ребер диаграммы осуществляется на основании пары ортогональных M -образов. Замыкание объектов-препятствий фокусным уравнением эллипса, позволяет однозначно определить опорные точки траектории через точки-фокусы эллипса. Постановка задачи может сводиться к методу полной дорожной карты, основанного на построении графовой модели.

Литература

1. Акопян А. В. Экстремальные свойства триангуляций Делоне // Труды ИСА РАН. – 2009. – Т. 46. – С. 174-187.
2. Скворцов А. В., Мирза Н.С. Алгоритмы построения и анализа триангуляции.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. — 167 с.
3. Местецкий Л. М. Скелет многосвязной многоугольной фигуры // Труды 15 междунар. конф. ГРАФИКОН-2005, Новосибирск — С. 242–249.
4. Толоч А.В., Локтев М.А. Функционально-воксельное моделирование при построении геометрического скелета / Тезисы докладов 16-й международной молодежной конференции «Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM – 2016). С. 105.

5. Толок А.В., Локтев М.А. Построение прямолинейного скелета и диаграммы Вороного на основе M-образов функционально-воксельного моделирования. / Труды 26-й Международной научной конференции GraphiCon2016. Н. Новгород: ИФТИ, ННГАСУ, 2016. С. 85-88.
6. FortuneS. A sweepline algorithm for Voronoi diagrams // *Algorithmica*. – 1987. – Vol. 2. – №. 1-4. – P. 153-174.
7. Толок А. В. Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании / Под ред. Академика РАН С. Н. Васильева. – М.: Физматлит, 2016. – 112 с.
8. Васильев С.Н., Локтев М.А., Толок А.В., Толок Н.Б., Ульянов С.А. К планированию маршрутов в 3d-среде с многовариантной моделью // Труды СПИИРАН. 2016. №2(45). С. 5-25
9. Рвачев В.Л. Теория R - функций и некоторые ее приложения. - Киев: Наукова думка, 1982. - 552 с.
10. Максименко-Шейко К.В., Мацевитый А.М., Толок А.В., Шейко Т.И..R-функции и обратная задача аналитической геометрии в трехмерном пространстве // *Информационные технологии*. 2007. №10. С. 23-32
11. Path planning for mobile robot navigation using Voronoi diagram and fast marching / S. Garrido, L. Moreno, M. Abderrahim, F. Martin // *Int. J. Robot. Autom.* – 2011. – Vol. 2. – №. 1. – P. 42-64
12. Интеллектуальное планирование траекторий подвижных объектов в средах с препятствиями / Под ред. проф. В. Х. Пшихопова // М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2015. – 304 с.
13. Bhattacharya, P. Roadmap-based path planning-Using the Voronoi diagram for a clearance-based shortest path / P. Bhattacharya, M. L. Gavrilova // *IEEE Robotics & Automation Magazine*. – 2008. – Vol. 15. – №. 2. – P. 58-66.