Разработка вычислительных средств геометрического моделирования сложных геометрических объектов на основе функционально-воксельного моделирования

С.В. Додонов
аспирант, dodonov15@yandex.ru
МГТУ «СТАНКИН», г. Москва
А.В.Толок
зав., лаб.№18, atol@ipu.ru
ИПУ РАН, г. Москва

В данной работе предлагается анализ разработанных ранее алгоритмов геометрических преобразований пространства функции, представленной локальными геометрическими характеристиками (ЛГХ). В числе таких преобразований входят сдвиг, поворот и масштабирование воксельных геометрических моделей (ВГМ). Данный шаг позволит провести дальнейшие исследования в направлении разработок программного обеспечения для реализации основных процедур построения сложных геометрических объектов, описанных каноническими уравнениями.

In this article, we propose an analysis of previously developed algorithms of geometric transformations of the space of a function represented by local geometric characteristics (LGC). Such transformations include displacement, rotation and scaling of voxel geometric models (VGM). This step will lead to further research in the direction of software development for implementing the basic procedures for constructing complex geometric objects described by canonical equations.

Введение

Создание архитектуры вычислений, основанной на применении графической информации, позволяет разрабатывать альтернативные способы решения задач геометрического моделирования сложных конструкций. Одним из таких компьютерно-графических подходов является метод функционально-воксельного моделирования (ФВМ) [1]. Основой функционально-воксельного моделирования является однородность структуры воксельных геометрических моделей (ВГМ), построенных на локальных геометрических характеристиках (ЛГХ). Учёт значений локальных геометрических характеристик определяет наклон касательной в каждой точке на поверхности исходной функции.

Описанные в работах [2] и [3] алгоритмы и принципы подводят к тому, что геометрические преобразования пространства, приведённые к матричному виду, на основе использования локальных геометрических характеристик позволяют строить любые сложные геометрические модели.

1. Геометрические преобразования пространства функции

Разработанные алгоритмы рассчитывают преобразование простыми алгебраическими зависимостями между характеристиками ВГМ в обход зачастую сложному пересчету самого аналитического объекта.

1.1. Операция сдвига

В основе геометрической модели сдвига лежат локальные геометрические характеристики. Данная модель строится из геометрической модели формирования трехкомпонентного вектора нормали. На ней присутствует прямая $Ax + By + C = 0$ и вектор $\overrightarrow{N_3}$, описывающие ее положение в пространстве. При отдалении прямой от начала координат компоненты наклона нормали A_n, B_n уменьшают свое значение, в то время, как величина проекции, характеризующая удаленность прямой от начала координат C_n, увеличивается. Для установления взаимосвязи между ними с использованием только локальных геометрических характеристик, необходимо установить следующие условия сдвига:

1. $\frac{A}{B} = \frac{A_n}{B_n} = \frac{A'_n}{B'_n}$ $A = const, B = const$ - при смещении вдоль осей, отношение компонентов наклона нормали остается низменным;
2. $\begin{cases} A'_n = f(L), \text{где } L = F(x, f(x)) \\ B'_n = f(L), \text{где } L = F(y, f(y)) \end{cases}$ - фактическое значение всех проекций зависит от величины удалённости от начала координат.

Прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$, после перемещения занимает новое положение и задается уравнением $A'x + B'y + C' = 0$. Проекции A_n, B_n, C_n и A'_n, B'_n, C'_n являются компонентами трехкомпонентной нормали $\overrightarrow{N_3}$ и $\overrightarrow{N'_3}$ соответственно до и после перемещения. Нормаль $\overrightarrow{N_3}$ движется по окружности и переходит в $\overrightarrow{N'_3}$ ($\overrightarrow{N_3} \to \overrightarrow{N'_3}$). Необходимо установить зависимость значений компонент нормали между собой до и после смещения с учетом величин смещения Δx и Δy вдоль соответствующих осей.

Взаимосвязь двухкомпонентной и трехкомпонентной нормалями осуществляется через величину удалённости от начала координат L и выражается из геометрической модели формирования трехкомпонентного вектора нормали:

$$A_n = A \cdot \sqrt{(1 - C_n^2)}; B_n = B \cdot \sqrt{(1 - C_n^2)} \text{, где } C_n = \frac{L}{\sqrt{1+L^2}} \quad (1)$$

Перемещение воксельных геометрических моделей в пространстве заключается в композиции перемещений вдоль осей координат. Преобразование в самих моделях заключаются в нахождении нового значения компонента нормали C_n, отвечающего за удаленность от начала координат. Компоненты A, B остаются неизменными при любом смещении, т.к. являются частным случаем положения трехкомпонентного вектора нормали, когда исходная прямая проходит через начало координат. Таким образом, компоненты трехкомпонентной нормали будут определяться следующим образом:

$$A'_n = A \cdot \sqrt{(1 - C_n'^2)} \text{ и } B'_n = B \cdot \sqrt{(1 - C_n'^2)} \text{, где } C'_n = \frac{L'}{\sqrt{1+L'^2}} \text{ и } L' = L + \Delta L \quad (2)$$

Величина смещения ΔL, в свою очередь, зависит от Δx и Δy .

На рис.1 изображена геометрическая модель смещения прямой в двумерном пространстве.

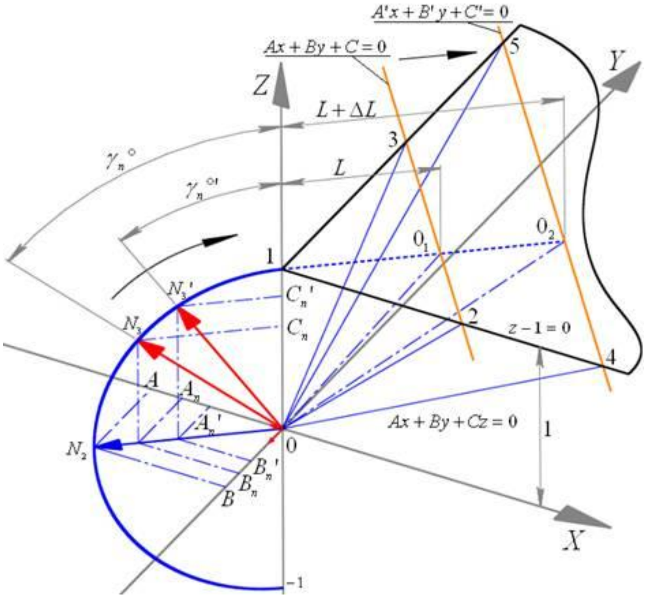

рис.1 Геометрическая модель смещения прямой в двумерном пространстве

Обратимся к рисунку 2, на котором изображено смещение прямой в плоскости:

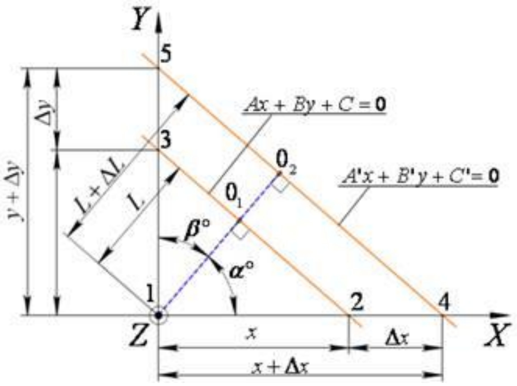

рис.2 Смещение прямой в плоскости

Из рисунка видно, что: $\Delta L = \Delta x \cdot cos\,\alpha$ или $\Delta L = \Delta y \cdot cos\,\beta$.

Исходя из условий сдвига, при смещении прямой, координаты пересечения с осями OX и OY пропорционально изменяются. При изменении Δx вдоль оси OX, одновременно и пропорционально будет меняться Δy вдоль оси OY и на оборот. Таким образом: $\Delta x = \Delta y \cdot tg\,\beta$, $\Delta y = \Delta x \cdot tg\,\alpha$.

Для нахождения компонент A'_n, B'_n, C'_n, полученные выражения необходимо подставить в выражения (2).

Изменение внутри ВГМ при воксельном подходе к смещению плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ будет определяться через пространство увеличенной на единицу размерности. Значения ЛГХ после смещения будут определяться по следующим зависимостям:

$$A'_n = A \cdot \sqrt{(1 - D_n'^2)}\,,\ B'_n = B \cdot \sqrt{(1 - D_n'^2)}\,,\ C'_n = \mathrm{C} \cdot \sqrt{(1 - D_n'^2)},\ D'_n = \cos\left(arcctg(D')\right);$$

$$[A'B'C'D'] = [A\ B\ C\ D] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где A, B, C, D – ЛГХ, выражающиеся из численного значения цвета пикселя исходной ВГМ [4].

1.2. Операция поворота

Для того, чтобы описать воксельный поворот, необходимо обратиться к геометрической модели поворота вокруг заданной оси с использованием локальных геометрических характеристик (см. рис 3).

Изменения, позволяющие выполнить поворот, выполняются при следующих условиях:
1. Угол наклона нормали к оси OZ остается неизменным $\gamma^{\circ} = const$;
2. Значение компонент угла наклона прямой после поворота зависят от проекции двухкомпонентного вектора нормали на эти же самые оси координат $\begin{cases} A'_n = f(A) \\ B'_n = f(B) \end{cases}$.

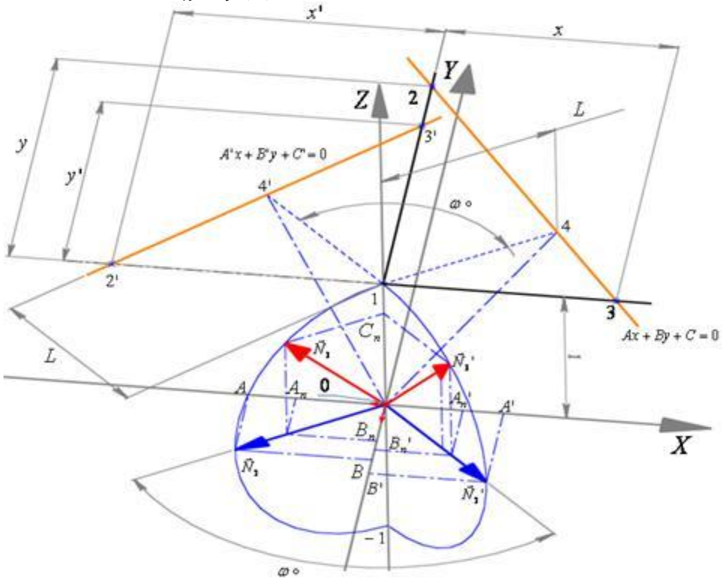

рис.3. Геометрическая модель поворота прямой в двумерном пространстве

Данные условия поворота требуют пояснений. Так как поворот выполняется в плоскости проекции, значения меняют только две компоненты нормали $\overrightarrow{N_3}$, соответственно $A_n \to A'_n, B_n \to B'_n, C_n = const$.

Зависимость трехкомпонентного вектора нормали $\overrightarrow{N_3}$ и двухкомпонентного вектора $\overrightarrow{N_2}$ определяются зависимостью (1). Угол поворота ω° - двумерный, следовательно, все преобразования должны происходить с компонентами двумерной нормали $\overrightarrow{N_2}$. Получив новое значение этих компонент, можно найти компоненты трехкомпонентной нормали $\overrightarrow{N_3}$ после поворота, описывающие положение повернутой прямой в пространстве. Таким образом компоненты нормали после поворота будут определяться как:

$$A'_n = A' \cdot \sqrt{(1 - C'^2_n)},\ B'_n = B' \cdot \sqrt{(1 - C'^2_n)},\ C'_n = C_n \tag{4}$$

Исходные данные при воксельном повороте соответствую исходным данным при воксельном смещении. С тем условием, что нормаль $\overrightarrow{N_3}$, вращаясь вокруг оси OZ, переходит в $\overrightarrow{N'_3}$. Необходимо установить зависимость значений компонент нормали между собой с учетом угла поворота ω°.

Связь компонент нормали $\overrightarrow{N_2}$ до поворота и $\overrightarrow{N'_2}$ после осуществляется следующим образом: $A' = A\cos\omega - B\sin\omega$, $B' = B\cos\omega - A\sin\omega$, где A и B определяются как: $A = \frac{A_n}{\sqrt{(1-C_n^2)}}$, $B = \frac{B_n}{\sqrt{(1-C_n^2)}}$.

Для нахождения компонент A'_n, B'_n, C'_n, полученные выражения необходимо подставить в выражения (4).

Воксельный поворот плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ будет выполняться последовательно вокруг осей координат (в плоскостях проекции). Компоненты нормали при повороте вокруг оси OZ будут вычисляться следующим образом:

$$A'_n = A' \cdot \sqrt{(1 - D'^2_n)}\ ,\ B'_n = B' \cdot \sqrt{(1 - D'^2_n)}\ ,\ C'_n = C' \cdot \sqrt{(1 - D'^2_n)},\ D'_n = D' \cdot \sqrt{(1 - D'^2_n)};$$

$$[A'B'C'D'] = [A\ B\ C\ D] \times \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $A = \frac{A_n}{\sqrt{(1-D_n^2)}}$, $B = \frac{B_n}{\sqrt{(1-D_n^2)}}$, $C = \frac{C_n}{\sqrt{(1-D_n^2)}}$, $D = \frac{D_n}{\sqrt{(1-D_n^2)}}$.

1.3. Операция масштабирования

Воксельный способ масштабирования основан на использовании локальных геометрических характеристик воксельной геометрической модели. Воксельное масштабирование можно представить, как смещение в равных пропорциях каждой точки поверхности функции. При воксельном масштабировании меняется не только направление вектора нормали, но и значение компонентов, организующих данный вектор. Данный тип масштабирования объединяет в себе элементы воксельного смещения и поворота. Что бы лучше понять воксельное масштабирование, рассмотрим геометрическую модель масштабирования вдоль оси OX на основе локальных геометрических характеристик (см. рис. 4).

Вводится следующее общее условие масштабирования для двумерного случая.

Конечное значение компонентов нормали зависит от изменения величины удаленности от начала координат L и от изменения компонент A и B, характеризующих наклон к осям координат. В свою очередь компоненты наклона зависят от удаленности от начала координат L и масштабных коэффициентов M_x и M_y вдоль осей OX и OY. Удаленность L зависит от масштабных коэффициентов M_x и M_y.

В общем виде зависимость компонентов нормали $\overrightarrow{N'_3}$ записывается следующим образом:

$$\begin{cases} A'_n = F(L', A'), \quad A' = f(L', M_x), \text{где } L' = f(M_x, M_y); \\ B'_n = F(L', B'), \quad B' = f(L', M_y), \text{где } L' = f(M_x, M_y); \\ C'_n = F(L'), \text{где } L' = f(M_x, M_y). \end{cases}$$

Исходные данные при воксельном масштабировании соответствуют исходным данным при воксельном смещении и повороте.

Необходимо установить зависимость значений компонентов нормали до и после масштабирования с учетом масштабных коэффициентов M_x и M_y и вдоль осей OX и OY соответственно.

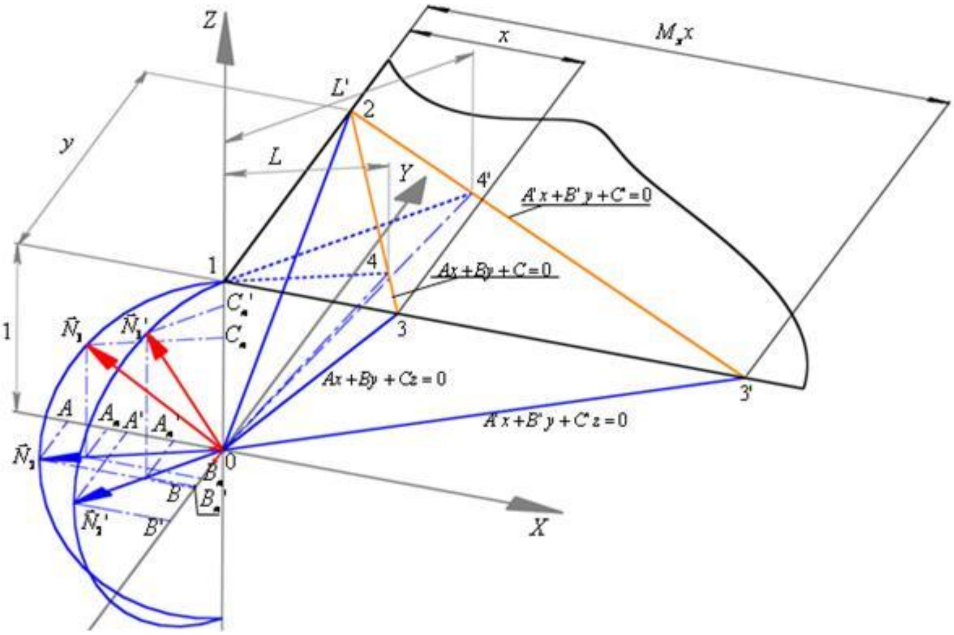

рис 4. Геометрическая модель масштабирования прямой в двумерном пространстве

При масштабировании смещение исходной прямой происходит в плоскости, параллельной плоскости OXY. Взаимосвязь компонентов нормали $\overrightarrow{N_3}$ и $\overrightarrow{N_2}$ осуществляется с помощью формул (1). Те же закономерности справедливы и для прямой, занявшей новое положение после масштабирования.

$$A'_n = A' \cdot \sqrt{(1 - C'^2_n)}; B'_n = B' \cdot \sqrt{(1 - C^2_n)}\ , C'_n = \frac{L'}{\sqrt{1+L'^2}} \tag{5}$$

Для определения компонентов нормали $\overrightarrow{N'_3}$ после масштабирования необходимо определить соответствующие компоненты $\overrightarrow{N'_2}$. Так же необходимо определить величину удаленности от начала координат L'.

$$L' = M_y \frac{C_n}{B_n} \cos\alpha', \ \alpha' = arctg\left(\frac{M_x B_n}{M_y A_n}\right), \text{где } A' = \frac{L' A_n}{M_x C_n}, B' = \frac{L' B_n}{M_y C_n}.$$

Полученные значения A' и B', для нахождения значений компонент нормали необходимо подставить в выражения (5).

Воксельное масштабирование положения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ необходимо выполнить с учетом наличия угла наклона, характеризующего отклонение плоскости от оси OZ и коэффициентов масштабирования M_x, M_y и M_z вдоль каждой оси пространства. Значения ЛГХ нормали будут находиться как:

$$A'_n = A' \cdot \sqrt{(1 - D'^2_n)}, B'_n = B' \cdot \sqrt{(1 - D^2_n)}, C'_n = C' \cdot \sqrt{(1 - D^2_n)}, D'_n = \cos\left(arcctg(D')\right);$$

$$[A'B'C'D'] = [A\ B\ C\ D] \times \begin{bmatrix} \frac{R}{DM_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R}{DM_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R}{DM_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R}{D} \end{bmatrix},$$

где $R = \frac{M_x M_y M_z D_n}{\sqrt{(M_x M_y A_n)^2 + (M_x M_y B_n)^2 + (M_x M_y C_n)^2}}$.

2. Идея программной реализации вычислителя на основе геометрических преобразований

Исследование проводится в рамках функционально-воксельного метода, позволяющего, как было выше указано, разрабатывать альтернативные способы решения задач моделирования.

В чем же может проявляться эта альтернатива? Можно уйти от традиционных координатных методов и перейти к понятию локальных геометрических характеристик. Координаты (x, y, z), которые несли свою геометрическую информацию о форме объекта в координатном методе, превращаются в обычную точку в пространстве, не несущую никакой информацию о форме и лишь локализующую геометрическую информацию в определенной точке пространства. При этом вся геометрическая информация о форме остается только в локальных геометрических характеристиках. Таким образом, как бы подменяется пространство «xyz» на пространство «ABCD».

В данной ситуации поставленная задача состоит в том, чтобы исследовать в первую очередь традиционные средства геометрического моделирования, которые работают с координатами «xyz», при этом объектом исследования является пространство «ABCD», которое должно подвергаться тем же самым геометрическим преобразованиям.

Данный шаг позволит отказаться от «xyz» на определенном уровне, и тогда работа будет проводиться только с локальными геометрическими характеристиками, которые позволят изменять так и пространство функции, так и двигать вправо-влево, поворачивать, масштабировать функционально-воксельную модель в пространстве и т.д.

Заключение

Такой подход ставит вопрос разработки новых принципов автоматических вычислительных средств для графических карт для работы с воксельными моделями. Для этого сначала потребуется создать математический аппарат, позволяющий определять локальные геометрические характеристики воксельной геометрической модели. Затем закодировать созданный математический аппарат и алгоритмы геометрических преобразований в процедуры автоматических вычислительных средств, одним из таких является воксельный вычислитель.

Разработка такого рода графического вычислителя позволит повысить эффективность обработки воксельных геометрических моделей за счет ускорения выполнения приведенных выше операций.

Литература

1. Толок, А.В. Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании / А.В. Толок. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 112 с.
2. Толок А.В., Лоторевич Е.А. «Тройственность подхода к задачам преобразования пространства функционально-воксельной модели». Труды 26-й Международной научной конференции GraphiCon2016. Н. Новгород: ИФТИ, ННГАСУ, 2016. С. 81-84.
3. Лоторевич Е.А. Применение воксельных геометрических моделей для решения задач компоновки функции / Е.А. Лоторевич, А.В. Толок // В сборнике: Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM - 2015) Труды международной конференции 2015. С. 47-51.
4. Толок А.В. Исследование функции одной переменной с помощью графических образов / А.В. Толок, В.В. Мухин. // Вестник Запорожского государственного университета. 1999. С. 108-112.